# Задачи к курсу "Теоретические основы численных методов"

- **Задача 1.** Доказать, что банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ единичной сферы и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha\, x + (1-\alpha)\, y\| < 1.$$

- **Задача 2.** Доказать, что банахово пространство $\mathbf{B} = C[0,1]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ не является строго нормированным.

- **Задача 3.** Доказать, что банахово пространство классов интегрируемых по Лебегу функций $\mathcal{L}_1[0,1]$ с нормой $\|f\| = \int\limits_0^1 |f(x)|\, d\mu$ не является строго нормированным.

- **Задача 4.** Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство и $\mathbf{H}_n$ — его $n$-мерное подпространство. Пусть отображение $\pi = \pi_n : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ сопоставляет элементу $x \in \mathbf{H}$ наименее уклоняющийся элемент из $\mathbf{H}_n$. Доказать, что

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k$$

и

$$\varepsilon(x, \mathbf{H}_n) = \left( \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $e_1, \ \ldots e_n$ — произвольный ортонормированный базис.

- **Задача 5.** Пусть $M \subset \mathbf{B}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, \ \lambda\, x \in P_M$. Доказать, что тогда выполнено равенство $\pi(\lambda\, x) = \lambda\, \pi(x)$.

- **Задача 6.** В $C[\mathbf{S}^1]$ не существует четномерных Чебышевских подпространств.

- **Задача 7.** Не существует чебышевских подпространств размерности большей 1 на множестве, являющемся объединением трех отрезков с общим концом.

- **Задача 8.** Чебышевское подпространство размерности большей 1 определено на связном компактном множестве тогда и только тогда, когда это множество гомеоморфно отрезку или окружности.

- **Задача 9.** Докажите теорему Чебышева для произвольного чебышевского подпространства в случае $D = \mathbf{S}^1$.

- **Задача 10.** Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Рассмотрим $2\pi$-периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 3^k x$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos 3^k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

- **Задача 11.** Пусть $f \in C[D]$ и для некоторого $p$ из чебышевского подпространства $L$ размерности $n$ найдутся точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, в которых разность $r = f - p$ принимает ненулевые значения с чередующимися знаками ( в силу задачи 2 это множество упорядочено, для $\mathbf{S}^1$ этот порядок задает направление обхода по окружности.) Тогда

$$\varepsilon(f, L) \geq \min_{1 \leq k \leq n+1} |r(x_k)|.$$

- **Задача 12.** Пусть $f \in C[\mathbf{S}^1]$ — четная функция. Тогда наименее уклоняющийся многочлен Чебышева также является четной функцией.

- **Задача 13.** Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, а $1 \leq n_1 < n_2 < \ \ldots < n_k < \ \ldots$ — такие натуральные числа, для которых все отношения $n_{k+1}/n_k$ суть целые нечетные числа. Положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos n_k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

- **Задача 14.** Последовательность функций

$$J_n(x) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)} \left(\frac{\sin nx/2}{n \sin x/2}\right)^4 = \frac{6\pi n}{2n^2+1} \Phi_n^2(x).$$

- **Задача 15.** Докажите, что для четной функции существует четный тригонометрический многочлен, удовлетворяющий неравенству из теоремы Джексона.

- **Задача 16.** Пусть $f \in W^r(M, [a,b])$. Тогда для любого $n \geq r$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) < \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \frac{A_r M}{n^r}, \quad n \geq r,$$

где константа $A_r$ не зависит от $M,\ n,\ f$ и равна $A_r = (Cr)^r/r!$ ( $C$ — константа из теоремы Джексона).

**Указание:** сначала сведите доказательство к случаю функций $f$ на отрезке $[-1, 1]$, затем перейдите к функциям вида $h(t) = f(\cos t)$.

- **Задача 17.** Доказать, что для произвольных $\varphi_1,\ \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ :

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{(n-1)^2} \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \cdot \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2},$$

при $n > 1$ и

$$(b) \begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cdots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cdots & \sin n\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \cdots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{n(n-1)} \prod_{k=1}^{n} \sin\varphi_k \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \cdot \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}.$$

Указание к задаче 17. Воспользуйтесь тем, что $\cos nx$ и $\sin(n+1)x/\sin x$ — многочлены степени $n$ относительно переменной $\cos x$. Найдите их старшие коэффициенты. Используйте определитель Вандермонда.)

- **Задача 18.** Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения для вывода леммы 2.

- **Задача 19.** Докажите лемму 6. Для этого рассмотрите процедуру дифференцирования функций $\Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$. Сколько раз можно дифференцировать эту функцию? Докажите, что при дифференцировании число нулей не изменится. Воспользуйтесь периодичностью функций. Рассмотрите отдельно случай четного $r$ и случай нечетного $r$.

- **Задача 20.** Доказать, что выполняются соотношения

$$1.\ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |k-j| = (k-1)!\cdot(n-k)!,$$
$$2.\ k!\cdot(n-k)! \le (n-1)!,\ \ 1\le k<n,$$
$$3.\ \prod_{j=1}^{m}\left(j-\frac{1}{2}\right) \ge \frac{m!}{2}\sqrt{m},\ \ m\ge 1.$$

- 21. Пусть $m,\nu$ — целые, $m\ge 1$, $m\ge\nu\ge 0$, $f\in C^m[I]$ и $f$ имеет $k\ge m$ различных нулей на $I$. Тогда $f^{(n-\nu)}$ имеет не менее $k-\nu$ корней на отрезке $I$.

- **Задача 22.** Для произвольной функции $f\in C^n[a,b]$ и системы узлов $\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,x_n)$ и любого $x\in[a,b]$

$$f(x)=\pi_n(\mathbf{x},f)(x)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k),$$

где $y_1<\xi<y_2$, а $y_1=\min\{x,x_1,\ \ldots,x_n\}$ и $y_1=\max\{x,x_1,\ \ldots,x_n\}$.

- **Задача 23.** Пусть $n\ge 1$, $f\in C^n[a,b]$, $\mathbf{x}^*=(x_1^*,\ \ldots,x_n^*)$ — чебышевские интерполяционные узлы на $[a,b]$, $x_k^*=\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k-1}{2n\pi}+\frac{a+b}{2}$, $1\le k\le n$. Докажите, что при $a=-1$, $b=1$

$$\|f-\pi_n(\mathbf{x}^*,f)\|\le\frac{1}{2^{n-1}n!}\sup_{x\in[-1,1]}|f^{(n)}(x)|.$$

**Задача 24.** Пусть $f\in C[a,b]$ — ограничение целой функции. Тогда для произвольного $q>0$ найдется $A>0$, что для любой системы узлов $\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,x_n)$ на отрезке $[a,b]$ выполняется неравенство $\|f-\pi(\mathbf{x},f)\|\le Aq^n$. Вывести из этого, что интерполяционный процесс, отвечающий произвольной интерполяционной матрице $\mathbf{X}$ на отрезке $[a,b]$ равномерно сходится к функции $f$.

- **Задача 25.** Пусть $f \in C^\infty[a,b]$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \le BA^n$ для всех $n \ge 1$ и некоторых констант $A > 0$ и $B > 0$. Докажите, что

  а) интерполяционный процесс, отвечающий произвольной матрице интерполяционных узлов на $[a,b]$ равномерно на $[a,b]$ сходится к $f$,

  б) функция $f$ аналитична на $[a,b]$. Рассмотрите примеры $f(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Задача 26.** Докажите неравенство Лебега

  $$\|f - l_r(\mathbf{x}, f)\| \le (1 + \|l_r\|)\varepsilon(f, \mathcal{L}_r^{(n)}),$$

  где $f \in C[a,b]$, $2 \le r \le n$.

-
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

- 
- 