Теоретические основы методов вычислений. Конспект лекций

Шокуров А.В.

Содержание

1 Постановка задачи о наилучшем приближении

В нормированном пространстве **B** фиксируем некоторое непустое подмножество M. Пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в нормированном пространстве **B**.

Определение 1.1. *Число $\varepsilon(x, M) = \inf_{y} \in M\|x - y\|$ называется наилучшим приближением элемента $x \in$ **B** на множестве M. Элемент $y_* \in M$ называется наименее уклоняющимся от x, или элементом наилучшего приближения на множестве M, если $\|x - y_*\| = \varepsilon(x, M)$.*

Предложение 1. *1.(Э.Борель) Пусть $M \subset$ **B** конечномерное подпространство нормированного пространства **B**. Тогда для любого элемента $x \in$ **B** существует хотя бы один наименее уклоняющийся элемент $y \in M$. 2. Пусть $M \subset$ **B** — выпуклое замкнутое подмножество. Тогда множество наименее уклоняющихся от x элементов выпукло и замкнуто.*

Доказательство. 1. Поскольку M конечномерно, оно замкнуто в **B**. Для заданного $x \in$ **B** рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию φ : **B** $\to \mathbb{R}$, заданную формулой $\varphi(y) = \|y - x\|$. Фиксируем $y_0 \in M$ и рассмотрим множество $P = \{y \in M| \quad | \quad \|y - x\| \leq \|y_0 - x\|\} = M \bigcap \{y \in \mathbf{B} \quad | \quad \varphi(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{y_0})\}$.

Множество P замкнуто, поскольку является пересечением двух замкнутых множеств. Пусть $y \in P$, тогда

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq \|y_0 - x\| + \|x\|.$$

Следовательно, множество P ограничено. Поэтому, множество P компактно и, следовательно, по теореме Вейерштрасса функция $\varphi(y)$ достигает наименьшего значения на этом множестве. Этот элемент и является наименее уклоняющимся элементом.

2. Пусть y_1 и y_2 — два наименее уклоняющиеся элемента от $x \in$ **B**, т.е. $\varepsilon(x, M) = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$. Тогда для произвольного $0 \leq \alpha \leq 1$ имеем

$$
\begin{aligned}
\|x-(\alpha\, y_1+(1-\alpha)\, y_2)\| &= \|\alpha\, x+(1-\alpha)\, x-(\alpha\, y_1+(1-\alpha)\, y_2)\| \\
&= \|\alpha\,(x-y_1)+(1-\alpha)\,(x-y_2)\| \\
&\le \alpha\,\|(x-y_1)\|+(1-\alpha)\,\|(x-y_2)\| \\
&= \alpha\,\varepsilon(x,M)+(1-\alpha)\,\varepsilon(x,M) \\
&= \varepsilon(x,M).\square
\end{aligned}
$$

Обозначим для $M\subset \mathbf{B}$ через P_M множество всех тех элементов $x\in\mathbf{B}$, для которых существует и единственен элемент наилучшего приближения в M. Очевидно, $M\subset P_M$ и определено отображение $\pi : P_M\to M$, где $\pi(x)$ определяется как элемент, наименее уклоняющийся от $x\in P_M$. $\square$

Предложение 2. *1. Для любого $M\subset \mathbf{B}$ функция $\varepsilon(x,M)$ равномерно непрерывна по x. 2. Если $M\subset \mathbf{B}$ — подпространство, то: (а) $\varepsilon(\alpha\, x,M)=|\alpha|\,\varepsilon(x,M)$ для любых $x\in\mathbf{B}$ и $\alpha\in\mathbb{R}$. (б) $\varepsilon(x_1+x_2,M)\le\varepsilon(x_1,M)+\varepsilon(x_2,M)$ для любых $x_1,x_2\in\mathbf{B}$. (в) $\varepsilon(x,M)\le\|x\|$ для любого $x\in\mathbf{B}$. 3. Пусть $M\subset\mathbf{B}$ — конечномерное линейное многообразие. Тогда отображение $\pi : P_M\to M$ непрерывно.*

Доказательство. 1. Докажем неравенство

$$|\varepsilon(x_1,M)-\varepsilon(x_2,M)|\le\|x_1-x_2\|.$$

Для произвольного $y\in M$ имеем $\varepsilon(x_1,M)\le\|x_1-y\|\le\|x_1-x_2\|+\|x_2-y\|$. Поэтому, $\varepsilon(x_1,M)-\|x_1-x_2\|\le\|x_2-y\|$. Ввиду произвольности $y\in M$ получим $\varepsilon(x_1,M)-\|x_1-x_2\|\le\varepsilon(x_2,M)$. Поэтому, выполняется неравенство

$$\varepsilon(x_1,M)-\varepsilon(x_2,M)\le\|x_1-x_2\|.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\varepsilon(x_2,M)-\varepsilon(x_1,M)\le\|x_2-x_1\|.$$

Следовательно,

$$|\varepsilon(x_1,M)-\varepsilon(x_2,M)|\le\|x_1-x_2\|.$$

2. Свойства (а)–(в) очевидны.

3. Рассмотрим сходящуюся в P_M последовательность x_n и пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Докажем сначала, что последовательность $\pi(x_n)$ ограничена. Действительн

$$\begin{aligned}
\|\pi(x_n)\| &= \|\pi(x_n) - x_n + x_n\| \\
&\le \|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\| \\
&= \varepsilon(x_n, M) + \|x_n\| \\
&= \varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M) + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \\
&\le |\varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M)| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \\
&\le |x_n - x_0| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\|.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство доказано в п. 1). Поскольку последовательность x_n сходится, все слагаемые последней суммы ограничены. Следовател последовательность x_n ограничена. Необходимо доказать, что последовательность $\pi(x_n)$ сходится к $\pi(x_0)$. Пусть это не так. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x_{n_k}, для которых выполняется неравенство

$$|\pi(x_{n_k}) - \pi(x_0)| > \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность x_{n_k} совпадает со всей последовательностью x_n. Поскольку последовательность $\pi(x_n)$ ограничена, а подпространство M конечномерно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Опять без ограничения общности будем считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\pi(x_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(x_n) = y_0$. Тогда переходя к пределам в неравенствах

$$\|\pi(x_n) - \pi(x_0)\| > \varepsilon,$$

получаем

$$\|y_0 - \pi(x_0)\| \ge \varepsilon > 0.$$

Согласно определению проекции π выполнены равенства

$$\|\pi(x_n) - x_n\| = \varepsilon(x_n, M).$$

Переходя к пределу, получим ввиду непрерывности функции $\varepsilon(x, M)$ равенство

$$\|y_0 - x_0\| = \varepsilon(x_0, M).$$

Следовательно, y_0 наименее уклоняющийся от x_0 элемент пространства M. Тогда по определению пространства P_M выполняется равенство $y_0 = \pi(x_0)$, что противоречит полученному выше неравенству. $\square$

Определение 1.2. *Линейное нормированное пространство* **B** *называется строго нормированным, если для любых $x, y \in$* **B** *из $x \neq 0, y \neq 0, \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ всегда $x = \lambda\, y$, при некотором $\lambda > 0$.*

Предложение 3. *Пусть* **B** *— линейное строго нормированное пространство, $x \in$* **B***. Тогда*

1. если $M \subset$ **B** *выпуклое: то существует не более одного элемента из M наименее уклоняющегося от x,*

2. если $M \subset$ **B** *– конечномерное линейное многообразие, то существует и притом единственный элемент из M, наименее уклоняющийся от x.*

Пример 1. Пусть **B** – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), где $(x, y) \in$ **B**. Тогда пространство **B** является строго нормированным относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Пример 2. Пусть **B** $= L_p(D, \mu)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а μ мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Элементами пространства **B** являются классы эквивалентных, измеримых по Лебегу функций $f : D \to \mathbb{R}$, для которых функция f^p является μ-суммируемой по D, а две функции эквивалентны, если их разность равна нулю почти всюду в D. Норма в **B** задается равенством:

$$\|f\| = \left(\int_D |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда пространство **B** является строго нормированным относительно введенной нормы. Это утверждение следует из неравенства Минковского и условий при которых оно превращается в равенство.

Задача 1. Доказать, что банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ единичной сферы и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha\, x + (1-\alpha)\, y\| < 1.$$

Задача 2. Доказать, что банахово пространство $\mathbf{B} = C[0,1]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ не является строго нормированным.

Задача 3. Доказать, что банахово пространство классов интегрируемых по Лебегу функций $\mathcal{L}_1[0,1]$ с нормой $\|f\| = \int\limits_0^1 |f(x)|\, d\mu$ не является строго нормированным.

Задача 4. Пусть **H** — гильбертово пространство и $\mathbf{H}_n$ — его n-мерное подпространство. Пусть отображение $\pi = \pi_n : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ сопоставляет элементу $x \in \mathbf{H}$ наименее уклоняющийся элемент из $\mathbf{H}_n$. Доказать, что

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k$$

и

$$\varepsilon(x, \mathbf{H}_n) = \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $e_1,\ \ldots e_n$ — произвольный ортонормированный базис.

Задача 5. Пусть $M \subset \mathbf{B}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x,\ \lambda\, x \in P_M$. Доказать, что тогда выполнено равенство $\pi(\lambda\, x) = \lambda\, \pi(x)$.

2 Лекция 2. Теорема Чебышева

Пусть $C[D]$ — пространство вещественных непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m,\ m \geq 1$, состоящем из бесконечного числа точек, с нормой максимум модуля $\|f\| = \sup\limits_x \in D|f(x)|$. Особо выделим два случая: $D = [a,b]$ при $m = 1$ и $D = \mathbf{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| = 1\}$ при $m = 2$.

Определение 1. Подпространство $L \subset C[D]$ называется чебышевским, если любая ненулевая функция $f \in L$ имеет не более $n-1$ корня на отрезке $[a, b]$, где $\dim L = n$. Согласно предложению 1 лекции 1 для любой функции $f \in C[D]$ существует наилучшее приближение некоторым элементом из L. Согласно теореме Хаара такое приближение единственно, если пространство L чебышевское. Рассмотрим примеры чебышевских подпространств.

Пример 1. Пусть функция f_0 не обращается в нуль на компакте D. Тогда пространство $L = [f_0] = \{\alpha f_0 \quad | \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$ является одномерным чебышевским подпространством.

Пример 2. Пусть $I = [a, b]$ и $L = \mathcal{P}_n \subset C[I]$ — пространство многочленов на D степени меньшей чем $n > 0$. Из основной теоремы алгебры следует, что пространство $\mathcal{P}_n$ чебышевское.

Пример 3. Пусть $D = \mathbf{S}^1$. Отождествим пространство $C[\mathbf{S}^1]$ при помощи экспоненциального отображения $\exp : \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1$ с пространством 2π-периодических функций на $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{T}_{2n-1},\ n \geq 1$ — пространство тригонометрических многочленов вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx).$$

Это пространство чебышевское, $\dim \mathcal{T}_{2n-1} = 2n - 1$.

Приведенные примеры показывают:

(а) существование 1-мерных пространств Чебышева в произвольных пространствах функций,

(б) существование пространств Чебышева произвольной размерности в пространстве непрерывных на отрезке функций,

(в) существование пространств Чебышева нечетной размерности в пространстве непрерывных на окружности функций, или эквивалентно в пространстве 2π-периодических функций на прямой.

Далее будет доказано, что в пространстве непрерывных на окружности функций не существует пространства Чебышева четной размерности . Сформулируем теперь две теоремы, которые будут доказаны в частных случаях. Именно эти частные случаи будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 1. Пусть $L \subset C[I]$ — чебышевское подпространство, $n = \dim L \geq 1$ и $f \in C[I]$ – произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $n+1$ различные точки $a \leq x_1 < x_2 < \ \ldots < x_n + 1 \leq b$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $|r(x_i)| = \|r\| = \sup\limits_x \in I|r(x)|$ при $1 \leq i \leq n+1$, 2) $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ \ldots = (-1)^n \cdot r(x_{n+1})$.

Теорема 2. Пусть $L \subset C[\mathbf{S^1}]$ — чебышевское подпространство, $2n - 1 = \dim L \geq 1$ и $f \in C[\mathbf{S^1}]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $2n$ различные точки $0 \leq x_1 < x_2 < \ \ldots < x_{2n} < 2\pi$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $|r(x_i)| = \|r\| = \sup\limits_x \in I|r(x)|$ при $1 \leq i \leq 2n$, 2) $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ \ldots = -r(x_{2n})$.

Теорема 1 в частном случае $L = P_n$ была доказана Чебышевым. Доказательства теоремы 2 и обобщения теоремы 1 незначительно отличаются от доказательства Чебышева. Поэтому эти теоремы обычно называют теоремами Чебышева.

Определение 2. Пусть $g \in C[I]$. Точки $a \leq x_1 < x_2 < \ \ldots < x_m \leq b$ называются альтернансом m-го порядка для функции $g(x)$, если $|g(x_i)| = \|g\|, 1 \leq i \leq m$ и $(-1)^i g(x_i) = const$.

Определение 3. Пусть $g \in C[\mathbf{S^1}]$. Точки $0 \leq x_1 < x_2 < \ \ldots < x_m < 2\pi$ называются альтернансом m-го порядка для функции $g(x)$, если $|g(x_i)| = \|g\|, 1 \leq i \leq m$ и $(-1)^i g(x_i) = const = g(x_m)$. В силу определения, очевидно, любая ненулевая функция $g \in C[\mathbf{S^1}]$ не имеет альтернанса нечетного порядка. Теоремы 1 и 2 можно переформулировать теперь как одну теорему.

Теорема 3. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство причем $\dim L \geq 1$ и $f \in C[D]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда разность $r(x) = f(x) - p(x)$ имеет альтернанс порядка $\dim L + 1$.

Определение 4. Элементы чебышевского подпространства L в пространстве функций будем называть чебышевскими L-полиномами или просто чебышевскими полиномами. Пусть $f_1, \ \ldots, f_n \in C[D]$ и $x_1, \ \ldots, x_n \in$

D. Тогда введем обозначение

$$\Delta_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{f} = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ \ldots, \mathbf{f_n})$.

Предложение 1. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство и $\dim L = n$. Тогда 1) элементы $e_1, \ \ldots, e_n \in L$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n) \neq 0$ для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$, 2) для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$ и любых n чисел $c_1, c_2, \ \ldots, c_n$ существует и притом единственный интерполяционный чебышевский многочлен $p \in L$, для которого $p(x_i) = c_i$ при $1 \leq i \leq n$, 3) для любых $n-1$ попарно различных точек пространство чебышевских многочленов, обращающихся в этих точках в нуль, имеет размерность 1.

Доказательство. 1) Если $e_1, \ \ldots, e_n \in L$ линейно зависимы, то найдутся такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$. Тогда для любой последовательности точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$ линейная однородная система уравнений $A\mathbf{y} = 0$, где $A = \|e_j(x_i)\|_{1 \leq i,j \leq n}$ имеет ненулевое решение $\mathbf{y} = (\alpha_1, \ \ldots, \alpha_n)^T$. Следовательно, определитель системы равен нулю. Но $\det A = \Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n)$. Поэтому $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n) = 0$ для любой последовательности точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$ и, в частности, для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$.

Обратно, пусть $e_1, \ \ldots, e_n \in L$ и существуют n различных точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$, для которых выполнено равенство $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n) = 0$. Тогда $\det A = 0$ и, следовательно, столбцы матрицы A линейно зависимы. Поэтому существуют такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x_i) = 0$ при всех $1 \leq i \leq n$. Это означает, что функция $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) \in L$ имеет n различных корней. Поскольку подпространство L чебышевское, то отсюда вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$. Следовательно, вектора $e_1, \ldots, e_n \in L$ линейно зависимы.

2) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в чебышевском пространстве L и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ произвольные n чисел. Тогда согласно уже доказанному определитель системы линейных уравнений $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$, где $A = \|e_j(x_i)\|_1 \leq i, j \leq n$, не равен нулю, и, следовательно, эта система имеет ненулевое решение $\mathbf{y}^T = (y_1, \ldots, y_n)$. Тогда $p(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k(x)$ определяет искомый интерполяционный многочлен Чебышева.

3) Пусть даны n различных точек $x_1, \ldots, x_n$. Согласно 2) существует единственный чебышевский многочлен $p_0(x)$, обращающийся в 0 в точках $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и равный 1 в точке x_n. Тогда согласно 2) для любого чебышевского многочлена $q(x)$, обращающегося в 0 в точках $x_1, \ldots, x_{n-1}$, выполнено равенство $q(x) = q(x_0)p_0(x)$. ■

Предложение 2. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство и $\dim L = n$. 1) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n \in D$ — две системы попарно различных точек и для всех $1 \leq i \leq n$ существуют непрерывные функции $\xi_i : [0,1] \to D$, удовлетворяющие условиям: а) $\xi_i(0) = x_i, \xi_i(1) = y_i$ при $1 \leq i \leq n$, б) для любого t точки $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ попарно различные. Тогда для любого базиса $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ знаки определителей $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Delta_{\mathbf{e}}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ совпадают. 2) Пусть $D = [a,b]$ или $D = \mathbf{S}^1$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n - 1 \in D$ — попарно различные нули ненулевого элемента $p \in L$. Тогда $p(x)$ не имеет других нулей в D и меняет знак при прохождении x через каждый нуль $x_i, 1 \leq i \leq n-1$, отличный от концов a, b в случае отрезка $D = [a,b]$.

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию

$$f(t) = \Delta_{\mathbf{e}}(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)).$$

Согласно условию эта функция непрерывна. Поскольку по условию при любом t все точки $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ различны, то согласно предложению 1 функция $f(t)$ не обращается в нуль. Следовательно, $f(0)$ и $f(1)$ имеют одинаковые знаки. 2) Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \in D$ — различные корни чебышевского многочлена $p(x)$ и пусть между точками $u, v \in D$ имеется единственный корень x_k ($u, v \neq x_k$). Рассмотрим n непрерывных на $[0,1]$ функций

$$\xi_1(t) = x_1$$

$$\dots$$

$$\xi_k(t) = (1-t)u + tx_k$$

$$\xi_{k+1}(t) = (1-t)x_k + tv$$

$$\xi_{k+2}(t) = x_{k+1}$$

$$\dots$$

$$\xi_n(t) = x_{n-1}.$$

Тогда согласно уже доказанному утверждению 1) знаки определителей $\Delta_{\mathbf{e}}(u, x_1, \ \dots, x_{n-1})$ и $\Delta_{\mathbf{e}}(x_k, x_1, \ \dots, x_k - 1, v, x_{k+1}, \ \dots, x_{n-1})$ совпадают. Согласно предложению 1 для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $p(x) = \lambda\Delta_{\mathbf{e}}(u, x_1, \ \dots, x_{n-1})$. Кроме того из свойств определителей следует равенство $\Delta_{\mathbf{e}}(x_k, x_1, \ \dots, x_{k-1}, v, x_{k+1}, \ \dots, x_{n-1}) = -\Delta_{\mathbf{e}}(v, x_1, \ \dots, x_{n-1})$. Следовательно, числа $p(u)$ и $p(v)$ имеют противоположные знаки. ■

Следствие 1. В $C[\mathbf{S}^1]$ не существует четномерных Чебышевских подпространств.

3 Лекция 3. Доказательство теорем Чебышева

Теоремы 1 и 2 лекции 2 будут доказаны в следующих важных частных случаях: $D = I = [a,b]$, $L = \mathcal{P}_n$, $n > 0$ и $D = \mathbf{S^1}$ и $L = \mathcal{T}_{2n-1}$.

Лемма 1. Пусть $r, g \in C[D]$, $M = M(r) = \{x \in D \quad | \quad |r(x)| = \|r\|\}$. Тогда, если $a = \inf\limits_{x \in M} r(x)g(x) > 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < k < \delta$ всегда выполнено неравенство $\|r - kg\| < \|r\|$.

Лемма 2. Пусть $r \in C[I]$ ненулевая функция, $M = M(r) = \{x \in I \quad | \quad |r(x)| = \|r\|\}$. Тогда M представимо в виде объединения, $M =$

$\bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$, где $M_k,\ 1 \le k \le m,\ m \ge 1$ замкнутые непустые попарно непересекающиеся множества, причем: 1) $M_k < M_{k+1},\ 1 \le k \le m$, 2) $\mathrm{sign}(\mathrm{r}(\mathrm{x})) = -\mathrm{sign}(\mathrm{r}(\mathrm{y}))$ для любых $x \in M_k,\ y \in M_{k+1},\ 1 \le k \le m$.

Доказательство теоремы Чебышева для $L = \mathcal{P}_n$.

1. Необходимость. Пусть $f \in C[I]$ и $p \in L$ наименее уклоняется от f. Рассмотрим разность $r = f - p$. При $r = 0$ утверждение теоремы очевидно. Если $r \ne 0$, рассмотрим $M = M(r) = \{x \in I \mid |r(x)| = \|r\|\}$. Тогда множество M представимо в виде объединения, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$, непустых замкнутых непересекающихся множеств, удовлетворяющих условиям 1 и 2 леммы 2. Пусть не существует чебышевского альтернанса порядка $n+1$ для функции $r(x)$. Тогда $m \le n$. Поскольку все множества M_k компактны, существует последовательность точек

$$M_1 < y_1 < M_2 < y_2 < \ \ldots < y_{m-1} < M_m.$$

Рассмотрим многочлен $h(x) = \sigma(y_1 - x)\cdot(y_2 - x)\cdot\ \ldots\cdot(y_m - 1 - x)$ степени $m-1$, где $\sigma = \mathrm{sgn}\,\mathrm{r}(\mathrm{M}_1)$. Тогда функции $r(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условию леммы 1. Поэтому при некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство $\|r - \delta h\| < \|r\|$. Следовательно многочлен $p + \delta h \in L$ дает лучшее приближение. Поэтому предположение о том, что чебышевского альтернанса не существует неверно.

2. Достаточность. Пусть для разности $r(x) = f(x) - p(x)$ существует чебышевский альтернанс $x_1,\ \ldots x_n + 1$ порядка $n+1$, а наилучшим приближением является многочлен $q(x)$. Тогда

$$|f(x_k) - q(x_k)| < \|r\| = |r(x_k)| = |f(x_k) - p(x_k)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |q(x_k) - p(x_k)| &= |(f(x_k) - p(x_k)) - (f(x_k) - q(x_k))| \\ &\ge ||(f(x_k) - p(x_k))| - |(f(x_k) - q(x_k))|| \\ &= |(f(x_k) - p(x_k))| - |(f(x_k) - q(x_k))| \\ &> 0, \end{aligned}$$

причем $\mathrm{sgn}(\mathrm{q}(\mathrm{x_k}) - \mathrm{p}(\mathrm{x_k})) = \mathrm{sgn}(\mathrm{f}(\mathrm{x_k}) - \mathrm{p}(\mathrm{x_k}))$. Следовательно, существуют точки $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < y_n < x_{n+1}$, в которых $q(y_k) - p(y_k) = 0$. Поскольку $q(y_k) - p(y_k) \in L$, то $q(x) - p(x) = 0$ для всех $x \in I$. Поэтому $q(x) = p(x)$, т.е. многочлен $p(x)$ дает наилучшее приближение. ■

Теорема Чебышева для периодических функций и $L = \mathcal{T}_{2n-1}$ доказывается аналогично.

Теперь выведем в двух частных случаях теорему Хаара.

Следствие 1. Пусть $D = I,\ L = \mathcal{P}_n$ или $D = \mathbf{S}^1,\ L = \mathcal{T}_{2n-1}$. Тогда для любого $f \in C[D]$ наилучшая аппроксимация существует и единственна.

Доказательство. Существование следует из предложения 1 лекции 1. Докажем единственность. Пусть существует две наилучшие аппроксимации p и q функции f. Тогда, согласно предложению 1 лекции 1, наилучшей аппроксимацией является и $(p(x)+q(x))/2$. Поэтому согласно теореме Чебышева существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$ для разности $f(x) - (p(x) + q(x))/2$, где $m = \dim L$. Тогда

$$\begin{aligned}
2\varepsilon(f, L) &= \|2f - (p+q)\| \\
&= |2f(x_k) - p(x_k) - q(x_k)| \\
&= |(f(x_k) - p(x_k)) + (f(x_k) - q(x_k))| \\
&\le |(f(x_k) - p(x_k))| + |(f(x_k) - q(x_k))| \\
&\le \|f - p\| + \|f - q\| \\
&= 2\varepsilon(f, L).
\end{aligned}$$

Следовательно, все неравенства в приведенных выше соотношениях являются равенствами. Тогда $|f(x_k)-p(x_k)| = \|f-p\|$, $|f(x_k)-q(x_k)| = \|f - q\|$ и $\mathrm{sgn}(\mathrm{f}(\mathrm{x_k}) - \mathrm{q}(\mathrm{x_k})) = \mathrm{sgn}(\mathrm{f}(\mathrm{x_k}) - \mathrm{p}(\mathrm{x_k}))$. Поэтому $f(x_k) - p(x_k) = f(x_k) - q(x_k)$, т.е. $p(x_k) = q(x_k)$. Поскольку L чебышевское, из полученных равенств следует, что $p(x) = q(x)$ для всех $x \in D$. ■

Пример 1. Пусть $D = [-1, 1]$, $L = \mathcal{P}_n$ и $f(x) = x^n \notin L$. Рассмотрим алгебраический многочлен $T_n(x) = \cos n \arccos x$ степени n со старшим коэффициентом, равным 2^{n-1}. Этот многочлен имеет чебышевский альтернанс порядка $n+1$. Поэтому согласно теореме Чебышева многочлен $f(x) - T_n(x)/2^{n-1} \in \mathcal{P}_n$ является наименее уклоняющимся элементом от $f(x) = x^n$ в L и $\varepsilon(x^n, \mathcal{P}_n) = 1/2^{n-1}$.

Задача 1. Не существует чебышевских подпространств размерности большей 1 на множестве, являющемся объединением трех отрезков с общим концом.

Задача 2. Чебышевское подпространство размерности большей 1 определено на связном компактном множестве тогда и только тогда, когда это множество гомеоморфно отрезку или окружности.

Задача 3. Докажите теорему Чебышева для произвольного чебышевского подпространства в случае $D = \mathbf{S}^1$.

Задача 4. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Рассмотрим 2π-периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 3^k x$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos 3^k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

Задача 5. Пусть $f \in C[D]$ и для некоторого p из чебышевского подпространства L размерности n найдутся точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, в которых разность $r = f - p$ принимает ненулевые значения с чередующимися знаками (в силу задачи 2 это множество упорядочено, для $\mathbf{S}^1$ этот порядок задает направление обхода по окружности.) Тогда

$$\varepsilon(f, L) \geq \min_{1 \leq k \leq n+1} |r(x_k)|.$$

Задача 6. Пусть $f \in C[\mathbf{S}^1]$ — четная функция. Тогда наименее уклоняющийся многочлен Чебышева также является четной функцией.

Задача 7. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, а $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — такие натуральные числа, для которых все отношения n_{k+1}/n_k суть целые нечетные числа. Положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos n_k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

4 Лекция 4. Неравенство Джексона

Согласно теореме Вейерштрасса выполнено предельное соотношение

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) = 0.$$

Тем не менее остается вопрос о скорости сходимости. Оказывается скорость сходимости определяется классом гладкости функции $f(x)$.

Определение 1. Пусть $M > 0$ и r натуральное. Классом $W^r(M)$ называется множество $r-1$ дифференцируемых 2π-периодических функций, для которых $f^{(r-1)}(x) \in L_1(M)$.

Теорема 1 (Джексон). Существует константа C, не зависящая от r, n, M и f, для которой выполнено неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C^r \cdot M/n^r.$$

В качестве C можно взять $(3\pi^3/4) \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin^4 v}{v^3} dv$.

Прежде чем доказывать данное утверждение, напомним метод доказательства теоремы Фейера и вывод теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной функции многочленами.

Определение 2. Положительным ядром называется последовательность 2π-периодических функций $K_n(x)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $K_n(x) \geq 0$, 2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(x)dx = 1$ для всех $0 < \delta < \pi$.

При выполнении свойств 2 и 3 последовательность K_n называется ядром.

Лемма 1. Пусть $K_n(x)$ — положительное ядро. Тогда для любой 2π-периодической функции $f(x)$ последовательность функций $f_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)K_n(t)dt$ сходится равномерно к функции $f(x)$.

Доказательство. Ввиду свойств ядра для любого $0 < \delta < \pi$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t))K_n(t)dt \\ &= \left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\pi} \right) (f(x) - f(x+t))K_n(t)dt. \end{aligned}$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности и периодичности функции $f(x)$, эта функция равномерно непрерывна и ограничена на всей числовой прямой. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|x_1 - x_2| \leq \delta$ следует, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, и существует такое M, что $|f(x)| < M$ при всех x. Фиксируем такое $\delta < \pi$.

Тогда ввиду неотрицательности $K_n(t)$, имеем

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(x+t))K_n(t)dt\right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x+t)|K_n(t)dt \\
&< \int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}K_n(t)dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(t)dt,
\end{aligned}
$$

поскольку при $t \in [-\delta, \delta]$ всегда $|x-(x+t)| = |t| \leq \delta$. В силу ограниченности функции $|f(x)| < M$ выполнено неравенство

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\pi}^{\delta}+\int_{-\delta}^{\pi}\right)|f(x)-f(x+t)|K_n(t)dt &\leq 2M\left(\int_{-\pi}^{\delta}+\int_{-\delta}^{\pi}\right)K_n(t)dt \\
&= 2M\left(1-\int_{-\delta}^{\delta}K_n(t)dt\right).
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt\right| &= \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt-\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt\right| \\ &= \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x+t))K_n(t)dt\right| \\ &= \left|\left(\int\limits_{-\pi}^{\delta}+\int\limits_{-\delta}^{\delta}+\int\limits_{-\delta}^{\pi}\right)(f(x)-f(x+t))K_n(t)dt\right| \\ &\le \left(\int\limits_{-\pi}^{\delta}+\int\limits_{-\delta}^{\delta}+\int\limits_{-\delta}^{\pi}\right)|(f(x)-f(x+t))K_n(t)|dt \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt+2M\left(1-\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt\right).\end{aligned}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(x)dx=1$, последнее выражение является бесконечно малой, не зависящей от x. ■

Лемма 2. Последовательность функций

$$D_n(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx=\frac{\sin\left(n-1/2\right)x}{2\pi\sin(x/2)}$$

определяет ядро. Это ядро называется ядром Дирихле.

Доказательство. По определению ядра Дирихле

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\cos kt\right)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos ktdt=1.$$

Проверим свойство 3 определения ядра. Пусть $0<\delta<\pi$. Имеем

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} D_n(t)dt=1-\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right)D_n(t)dt.$$

Достаточно проверить, что $\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right) D_n(t)dt$ бесконечно малая величина. Рассмотрим функцию

$$g(x)=\begin{cases} 0 & |x|<\delta \\ 1 & \delta \le x \le \pi \end{cases}$$

Положим $h(x)=g(x)/\sin\frac{x}{2}$. Тогда

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right) D_n(t)dt =$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)tdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos\frac{t}{2}\sin ntdt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin\frac{t}{2}\cos ntdt.$$

Согласно неравенству Бесселя последние два слагаемых стремятся к нулю. ■

Лемма 3. Последовательность функций

$$\Phi_n(x)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)}{n}$$

определяет положительное ядро. Это ядро называется ядром Фейера.

Доказательство. По определению ядра Фейера

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n} D_k(t)dt=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=1.$$

Неравенство $\Phi_n(t)\ge 0$ следует из соотношения

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{4\pi n}\cdot\frac{1-\cos nt}{\sin^2(t/2)}.$$

Фиксируем $0<\delta\le\pi$. Функция

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{4\pi n}\cdot\frac{1-\cos nt}{\sin^2(t/(2\pi))}$$

ограничена на $[-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$. Следовательно, на этом множестве $\Phi_n(t) \rightrightarrows 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right)\Phi_n(t)=0.\blacksquare$$

Из лемм 1 и 3 следует

Теорема 2 (Фейер). Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ последовательность тригонометрических многочленов

$$f_n(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Phi_n(t)dt$$

равномерно сходится к функции f.

Теорема 3 (Вейерштрасс). Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность многочленов. Для доказательства теоремы потребуется

Лемма 4. Функцию $\cos nx$ можно представить как многочлен степени n от переменной $\cos x$.

Доказательство. При $n=0$ и $n=1$ утверждение очевидно.Пусть теорема доказана для всех $n \le k$ ($k>0$) и при всех $n \le k$ выполнено равенство $\cos nx = P_n(\cos x)$. Докажем, что тогда теорема справедлива и при $n=k+1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\cos(k+1)x &= \cos kx\cos x-\sin kx\sin x\\
&= P_k(\cos x)\cos x\\
&\quad -(\sin(k-1)x\cos x+\cos(k-1)x\sin x)\sin x\\
&= P_k(\cos x)\cos x\\
&\quad -\sin(k-1)x\sin x\cos x-\cos(k-1)x\sin^2 x\\
&= P_k(\cos x)\cos x+(\cos kx-\cos(k-1)x\cos x)\cos x\\
&\quad -\cos(k-1)x(1-\cos^2 x)\\
&= P_k(\cos x)\cos x+P_k(\cos x)\cos x-P_{k-1}(\cos x)\cos^2 x\\
&\quad -P_{k-1}(\cos x)(1-\cos^2 x)\\
&= 2P_k(\cos x)\cos x-P_{k-1}(\cos x)\\
&= P_{k+1}(\cos x).\blacksquare
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2. Определим функцию на отрезке $[0,1]$

$$g(s) = f((1-s)a + sb).$$

Функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ восстанавливается по функции $g(s)$, заданной на отрезке $[0,1]$, по формуле

$$f(x) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Поэтому достаточно установить теорему только для функций, заданных на отрезке $[0,1]$. Будем далее считать, что $f(x) \in C[0,1]$. Продолжим функцию $f(x)$ до четной функции на отрезке $[-1,1]$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

и определим четную функцию на всей числовой прямой

$$g(t) = h(\cos t).$$

В силу определения и условий теоремы, функция $g(t)$ непрерывна и периодична с периодом $T = 2\pi$. Следовательно, выполнены условия теоремы Фейера и последовательность $\sigma_n(t;g)$ сходится равномерно к функции $g(t)$. Поскольку функция $g(t)$ четная, коэффициенты $b_n = 0$ и, следовательно,

$$\sigma_n(t;g) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos kt =$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k P_k(\cos x) = Q_n(\cos t),$$

где $P_k(x)$ — многочлены из теоремы 2 и, следовательно, $Q_n(x)$ также многочлен степени n. Покажем теперь, что последовательность $Q_n(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Поскольку $Q_n(\cos t) \rightrightarrows g(t)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ всегда $|g(t) - Q_n(\cos t)| < \varepsilon$. Следовательно, при $n > N$ всегда $|f(\cos t) -$

$Q_n(\cos t)| < \varepsilon$, т.е. для всех $x \in [0,1]$ выполнено $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$. $\blacksquare$

Лемма 5. Последовательность функций

$$J_n(x) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)}\left(\frac{\sin nx/}{2n\sin x/2}\right)^4 = \frac{6\pi n}{2n^2+1}\Phi_n^2(x)$$

определяет положительное ядро. Это ядро называется ядром Джексона.

Упражнение 1. Докажите лемму 5.

Поскольку $\Phi_n(x)$ — тригонометрический многочлен степени $(n-1)$, то $J_n(x)$ тригонометрический многочлен степени $2(n-1)$. Следовательно, функция вида

$$T_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(t-x)f(t)dt$$

является тригонометрическим многочленом степени $\leq 2(n-1)$ для любой $f \in C[\mathbf{S}^1]$.

Доказательство теоремы Джексона. Пусть $r = 1$ и $f \in W^1(M)$. Для $m \geq 1$ рассмотрим тригонометрический многочлен

$$T(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_m(t-x)f(t)dt, \quad T(x) \in \mathcal{T}_{4m-3}.$$

Учитывая четность ядра Джексона и условие Липшица для функции f, получаем

$$|f(x) - T(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_m(t)(f(x) - f(x+t))dt\right| \leq$$

$$M\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t|J_m(t)dt = 2M\int\limits_{0}^{\pi} tJ_m(t)dt.$$

Ввиду неравенства $\sin(t/2) \geq t/\pi$ при $0 \leq t \leq \pi$ получаем

$$\int\limits_0^\pi tJ_m(t)dt \leq \frac{3\pi^3}{2m(2m^2+1)} \int\limits_0^\pi \frac{\sin^4 mt/2}{t^3} dt = \frac{3\pi^3 m}{8(2m^2+1)} \int\limits_0^{m\pi/2} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt < \frac{C}{4m}.$$

Следовательно, $\|f - T\| < \frac{CM}{2m}$. Если $n = 2m$, то с помощью ядра J_m построим тригонометрический многочлен $T \in \mathcal{T}_{4m-3} = \mathcal{T}_{2n-3} \subset \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого, как доказано выше, $\|f - T\| < \frac{CM}{2m} = CM/n$. Если $n = 2m-1$, то с помощью ядра J_m строим тригонометрический многочлен $T \in \mathcal{T}_{4m-3} = \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого, как доказано выше, $\|f - T\| < \frac{CM}{2m} < CM/n$.

Заметим, что если интеграл по периоду от функции f равен нулю, то и вычисляемый тригонометрический многочлен T также удовлетворяет этому условию. Пусть теперь теорема доказана для произвольного r и более того, если интеграл по периоду равен нулю, то и полученная аппроксимация удовлетворяет этому свойству. Докажем, что тогда то же выполнено и для $r+1$. Пусть $f \in W^r+1(M)$. Тогда $f' \in W^r(M)$. Причем, очевидно, интеграл по периоду от функции f' равен нулю. Тогда согласно индукционному предположению существует $T(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого выполнено неравенство $\|f' - T\| < C^r M n^{-r}$ и интеграл по периоду от T равен нулю. Тогда свободный член тригонометрического многочлена T нулевой. Поэтому существует тригонометрический многочлен U той же степени с нулевым свободным членом, для которого $U'(x) = f'(x)$. Следовательно, $\|(f-U)'\| = \|f' - T\| < C^r M n^{-r}$. Поэтому $f - U \in W^1(C^r M n^{-r})$. Следовательно, существует $t \in \mathcal{T}_{2n-1}$ такой, что $\|f - U - t\| < C(C^r M n^{-r})/n = C^{r+1}M/n^{r+1}$. Причем, если интеграл за период функции f равен нулю, то это же справедливо и для многочлена $U + t \in \mathcal{T}_{2n-1}$. ■

Упражнение 2. Докажите, что для четной функции существует четный тригонометрический многочлен, удовлетворяющий неравенству из теоремы Джексона.

Теорема 3. Пусть $f \in W^r(M, [a,b])$. Тогда для любого $n \geq r$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) < \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \frac{A_r M}{n^r}, \quad n \geq r,$$

где константа A_r не зависит от $M,\ n,\ f$ и равна $A_r = (Cr)^r/r!$ (C — константа из теоремы Джексона).

Упражнение 3. Докажите теорему 3. Указание: сначала сведите доказательство к случаю функций f на отрезке $[-1,1]$, затем перейдите к функциям вида $h(t) = f(\cos t)$.

5 Лекция 5. Теорема Фавара

Согласно теореме Джексона существует набор констант $C_r = C^r$, не зависящих от n, M и f, для которых выполнены неравенства

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C_r \cdot M/n^r, \quad f \in W^r(M).$$

Возникает вопрос о выборе оптимального набора таких констант.

Определение 1. Набор констант C_r, называется оптимальным, если: (а) для любых $n \geq 1,\ r \geq 1,\ f \in W^r(M),\ M > 0$ для констант C_r выполнено неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C_r \cdot M/n^r, \quad f \in W^r(M),$$

(б) если $0 < c' < C_r$ для некоторого $r \geq 1$, то для этого r при любом целом $n \geq 1$ и вещественном $M > 0$ найдется $f \in W^r(M)$, для которой $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) > c'M/n^r$.

Для набора $C_r = C^r$ из теоремы Джексона следует выполнение условия (а) определения 1. Кроме того, очевидно, $\lim\limits_{r\to\infty} C^r = \infty$. Оптимальные константы определяются теоремой Фавара.

Теорема 1 (Фавар). Пусть

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}}, \ \ r \geq 1.$$

Тогда для любых $f \in W^r(M)$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, T_{2n-1}) \leq K_r M/n^r, \ \ r \geq 1, \ n \geq 1,$$

причем для любых $r \geq 1, n \geq 1$ найдется функция $f_n r \in W^r(M)$, для которой $\varepsilon(f_{nr}, T_{2n-1}) \leq K_r M/n^r$.

Следовательно, набор констант K_r из теоремы Фавара оптимален. Из определения констант Фавара получаем

$$0 < K_r \leq \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому константы K_r ограничены в совокупности. Доказательство теоремы Фавара основано на следующих леммах.

Лемма 1. Пусть $n \geq 1$— натуральное и $2\pi/n$-периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке. Тогда для любого $1 \leq k \leq n-1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt = 0.$$

Если интеграл от $f(t)$ за период 2π равен 0, то для любого тригонометрического многочлена $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)T(t)dt = 0.$$

Доказательство. В силу $2\pi/n$-периодичности функции f выполняются равенства

$$J_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt \;\; = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) e^{ikt}\,dt = \int_{-\pi-\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{2\pi}{n}} f(x)e^{ik\left(x-\frac{2\pi}{n}\right)}\,dx$$

$$= e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} J_k.$$

Поскольку $1 \leq k \leq n-1$, то выполняется равенство $J_k = 0$. ■

Лемма 2. 1) Пусть $t_0, \ldots, t_{n-1} \in (0,\pi)$ — попарно различные точки и $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Тогда существует единственный четный тригонометрический многочлен $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos kt,\ \alpha_k \in \mathbb{R}$, для которого $T(t_j) = b_j$ при $0 \leq j \leq n-1$.

2) Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \in (0,\pi)$ — попарно различные точки и $d_1, \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Тогда существует единственный нечетный тригонометрический многочлен $T(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin kt,\ \beta_k \in \mathbb{R}$, для которого $T(\tau_j) = d_j$ при $1 \le j \le n-1$.

Определение 2. Пусть $r \ge 1$. r-й функций Бернулли называется функция

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r}.$$

При $r = 1$ ряд Бернулли определяет ряд фурье 2π-периодической функции

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t = 0,\ t = 2\pi \end{cases}.$$

Лемма 3 (Формула обращения). Пусть $f \in W^r(M)$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_r(t-\tau)f^{(r)}(\tau)d\tau.$$

Лемма 4. Коэффициенты Фурье для функции Бернулли $B_r(t)$ выражаются формулой

$$\mu_{r,n} + i\nu_{r,n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)e^{int}dt = \frac{i^r}{n^r}, \quad n > 0$$

и

$$\mu_{r,0} + i\nu_{r,0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)dt = 0.$$

Лемма 5. 1) При $r > 2$ функция $B_r(t)$ дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$ и $B_r'(t) = B_{r-1}(t)$.

2) При $r = 2$ функция $B_2(t)$ дифференцируема при $t \ne 2k\pi$ и $B_2'(t) = B_1(t)$ для таких точек t. В точках $t = 2k\pi$ существуют односторонние

производные и выполняется равенство $B_2'(2k\pi \pm 0) = B_1(2k\pi \pm 0)$. Определим теперь тригонометрические многочлены $T_{n,r}(t)$ так. Пусть $n \geq 1$ и $t_j = (2j+1)\pi/(2n)$ — все нули функции $\cos nt$ на интервале $(0,\pi)$, а $\tau_k = k\pi/n$ — все нули функции $\sin nt$ на интервале $(0,\pi)$. Для четного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r}(t)$ — тригонометрический многочлен, для которого $T_{nr}(t_j) = B_r(t_j)$, где $B_r(t)$ — r-я функция Бернулли. Для нечетного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r}(t)$ — тригонометрический многочлен, для которого $T_{nr}(\tau_k) = B_r(\tau_k)$, где $B_r(t)$ — r-я функция Бернулли. Согласно лемме 2 функции T_{rn} определены однозначно.

Лемма 6. Разность $\Delta(t) = \Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$ обращается в нуль на интервале $(0,\pi)$ при $n \geq 1$ и четном r только в точках t_j, а при нечетном r только в точках τ_k. При $n = 1$ и нечетном r корней на $(0,\pi)$ нет. Все корни являются простыми.

Лемма 7. Пусть $\varphi_r(t)$ — r-кратные периодические интегралы функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sign}\sin t$. Тогда

(а) $\varphi_r \in W^r(1)$, при $r \geq 1$,

(б) $\|\varphi_r\| = K_r$, где K_r — константы Фавара,

(б) $|\varphi_r(\pi/2)| = \|\varphi_r\|$, для четного $r \geq 2$ и $|\varphi_r(0)| = \|\varphi_r\|$, для нечетного $r \geq 1$.

Далее многочлены $\varphi_r(t)$ могут быть разложены в ряд Фурье.

Лемма 8. Функции $\varphi_r(t)$ из леммы 7 имеют следующие представления в виде рядов Фурье

$$\varphi_r(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Доказательство теоремы Фавара. Проверим сначала выполнение условий (а) определения 1. Согласно лемме 3 выполняется равенство

$$f(t) = \frac{a}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} B_r(t-\tau) f^{(r)}(\tau)d\tau.$$

Пусть $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ произвольный тригонометрический многочлен степени $< n$. Тогда

$$\Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} T(t-\tau) f^{(r)}(\tau) d\tau$$

также является тригонометрическим многочленом степени $< \ n$. Рассмотрим разность

$$f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} (B_r(t-\tau) - T(t-\tau)) f^{(r)}(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$|f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t)| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} |B_r(t-\tau) - T(t-\tau)| f^{(r)}(\tau) d\tau \leq$$

$$\frac{M}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} |B_r(z) - T(z)| dz.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) \leq \frac{M}{\pi} \cdot \inf_{T \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int\limits_{0}^{2\pi} |B_r(z) - T(z)| dz.$$

Достаточно проверить неравенство

$$\inf_{T \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int\limits_{0}^{2\pi} |B_r(z) - T(z)| dz \leq \pi K_r n^{-r}.$$

Для этого достаточно проверить, что , например,

$$\int\limits_{0}^{2\pi} |B_r(z) - T_n r(z)| dz \leq \pi K_r n^{-r}.$$

Согласно лемме 6 все корни разности $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ на интервале $(0,\pi)$ простые и совпадают с простыми корнями функции $\cos nt$ при четном r и с корнями $\sin nt$ при нечетном r. Поэтому знаки функций $B_r(t)-T_{n,r}(t)$ и $\cos nt$ при четном r и, соответственно, $\sin nt$ при нечетном r, либо всюду совпадают, либо всюду противоположны. Поэтому при четном r выполнено равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)|dz = 2\int\limits_{0}^{\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)|dz =$$

$$2\int\limits_{0}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z))\mathrm{sign}\Delta(z)dz = \pm 2\int\limits_{0}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z))\mathrm{sign}\cos nz dz =$$

$$2\left|\int\limits_{0}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z))\mathrm{sign}\cos nz dz\right| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z))\mathrm{sign}\cos nz dz\right| =$$

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} B_r(z)\mathrm{sign}\cos nz dz\right|,$$

где в последнем равенстве использована лемма 1. Аналогично для нечетного r

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |B_r(z) - T_n r(z)|dz = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} B_r(z)\mathrm{sign}\sin nz dz\right|.$$

Теперь воспользуемся обобщенным равенством Парсеваля в $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = \frac{\alpha_0 \cdot a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cdot a_k + \beta_k \cdot b_k),$$

где α_k, β_k и a_k, b_k — коэффициенты Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$, соответственно. Для функций Бернулли коэффициенты Фурье вычислены в лемме 4. Для функций $\operatorname{sign}\cos nt$ и $\operatorname{sign}\sin nt$ соответствующие ряды Фурье определяется формулами

$$\operatorname{sign}\cos nt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1}$$

и

$$\operatorname{sign}\sin nt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в равенство Парсеваля, получим при четном $r = 2\nu$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu}(z)\operatorname{sign}\cos nz dz = (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi n^{2\nu}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+1}} = \frac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r},$$

и нечетном $r = 2\nu + 1$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu+1}(z)\operatorname{sign}\sin nz dz = (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi n^{2\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2\nu+2}} = \frac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2}\pi|B_r(z) - T_{n,r}(z)|dz = K_r n^{-r}.$$

Итак, неравенство Фавара доказано. Покажем теперь, что константы Фавара неулучшаемы. Рассмотрим функции $f_{n,r}(t) = \dfrac{M}{n^r}\varphi_r(nt)$ и покажем, что для этих функций наименее уклоняющимся многочленом в $\mathcal{T}_{2n-1}$ является нулевой многочлен. Проверим сначала, что эти функции лежат в классе $W^r(M)$. Это следует непосредственно из леммы 7. Согласно лемме 8 многочлены $\varphi_r(t)$ могут быть разложены в ряд Фурье

$$\varphi_r(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Пусть $r=2\nu$ четное. Рассмотрим точки $\xi_k=(2k+1)\pi/(2n)$. Вычислим значения функции $f_{n,r}$ в этих точках, используя разложение в ряд Фурье. Получим

$$f_{n,r}(\xi_k)=\frac{M}{n^r}\varphi_r\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=\frac{4M}{\pi n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)(2k+1)\pi/2-\pi\nu]}{(2m+1)^{r+1}}=$$

$$\frac{4M(-1)^{\nu+k}}{\pi n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^{r+1}}=(-1)^{\nu+k}\frac{M}{n^r}K_r=(-1)^{\nu+k}\|f_{nr}\|,$$

т.е. точки $-\pi<\xi_{-n}<\ \ldots<\xi_{n-1}<\pi$ образуют альтернанс порядка $2n$ для функции $f_{n,r}$. Если $r=2\nu+1$ нечетное. Рассмотрим точки $\zeta_k=k\pi/n$. Вычислим значения функции $f_{n,r}$ в этих точках, используя разложение в ряд Фурье. Получим

$$f_{n,r}(\zeta_k)=\frac{M}{n^r}\varphi_r(k\pi)=\frac{4M\pi}{n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)(2k+1)\pi/2-\pi\nu-\pi/2]}{(2m+1)^{r+1}}=$$

$$\frac{4M(-1)^{\nu+k+1}}{\pi n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^{r+1}}=(-1)^{\nu+k+1}\frac{M}{n^r}K_r=(-1)^{\nu+k+1}\|f_{nr}\|,$$

т.е. точки $-\pi<\zeta_-n<\ \ldots<\zeta_{n-1}<\pi$ образуют альтернанс порядка $2n$ для функции $f_{n,r}$. Оптимальность констант Фавара доказана.

Задача 11. Доказать, что для произвольных $\varphi_1,\ \ldots,\varphi_n\in\mathbb{R}$:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}=$$

$$2^{(n-1)^2}\prod_{1\le i<k\le n}\sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2},$$

при $n>1$.

$$(b)\begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cdots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cdots & \sin n\varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \cdots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix}=$$

$$2^{n(n-1)} \prod_{k=1}^{n} \sin \varphi_k \prod_{1 \le i < k \le n} \sin \frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_i - \varphi_k}{2}.$$

(Указание. Воспользуйтесь тем, что $\cos nx$ и $\sin(n+1)x/\sin x$ — многочлены степени n относительно переменной $\cos x$. Найдите их старшие коэффициенты. Используйте определитель Вандермонда.)

Задача 12. Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения для вывода леммы 2.

Задача 13. Докажите лемму 6. Для этого рассмотрите процедуру дифференцирования функций $\Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$. Сколько раз можно дифференцировать эту функцию? Докажите, что при дифференцировании число нулей не изменится. Воспользуйтесь периодичностью функций. Рассмотрите отдельно случай четного r и случай нечетного r.

6 Лекция 6. Постановка задачи интерполяции

Рассмотрим бесконечный компакт $D \subset \mathbb{C}$ и пространство непрерывных на нем функций $C[D]$. Пусть P_n — пространство полиномов степени меньшей n.

Определение 1. Фиксируем произвольные n точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in D$ и набор чисел $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_i \in \mathbb{R}$. Интерполяционным полиномом для этих данных называется многочлен $p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in P_n$ для которого $p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(x_k) = y_k$.

Теорема 1. Интерполяционный полином существует для любого набора узлов.

Доказательство. Задача нахождения интерполяционного полинома эквивалентна задаче нахождения решения системы линейных уравнений

$$\begin{array}{l}
a_0 + a_1 \cdot x_1 + \ \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\
a_0 + a_1 \cdot x_2 + \ \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_0 + a_1 \cdot x_n + \ \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n
\end{array}$$

Определителем этой системы является определитель Вандермонда для узлов **x**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Поскольку все точки x_k различны, этот определитель не равен нулю ■.

Определение 2. Полиномами Лагранжа называются интерполяционные полиномы $l_{k,n}(\mathbf{x}) = p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)$ для $\mathbf{y}_k = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \cdots, \delta_{k,n})$.

Имеет место равенство

$$l_{k,n}(\mathbf{x})(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

При фиксации узлов интерполяции **x** обозначение для интерполяционного полинома обычно сокращается

$$p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_{n-1}(\mathbf{y})$$

и

$$l_{k,n}(\mathbf{x}) = l_{k,n}.$$

Решение задачи интерполяции можно записать в виде

$$p_{n-1}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot l_{k,n}.$$

Пусть задана функция $f \in C[D]$. Положим $\mathbf{y} = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$. Тогда полином $p_{n-1}(\mathbf{x}, f) = p_{n-1}(\mathbf{y}_k)$ называется интерполяционным полиномом функции f. Решение задачи интерполяции можно записать в виде

$$p(\mathbf{x}, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot l_{k,n}.$$

Определим операторы

$$\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)} : C[D] \to P_n$$

формулами

$$\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)}.$$

Заметим, что оператор $\pi_{\mathbf{x}}^{(0)} = \pi_{\mathbf{x}}$ является проектором. Действительно, интерполяционным полиномом для интерполяционного полинома является сам интерполяционный полином.

Определим числа $\lambda_n^{(\nu)} = \max\limits_{x \in D} \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{k,n}^{(\nu)}(x)|$. При $\nu = 0$ положим $\lambda_n^{(0)} = \lambda_n$.

Теорема 2. Линейные операторы $\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}$ непрерывны и выполняется равенство

$$\|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}\| = \lambda_n^{(\nu)}.$$

Доказательство. Выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}(f)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)} \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \cdot \|l_{k,n}^{(\nu)}\| \\ &\leq \|f\| \cdot \sum_{k=1}^{n} \|l_{k,n}^{(\nu)}\| \\ &= \|f\| \cdot \lambda_n^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}$ непрерывен и $\|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}\| \leq \lambda_n^{(\nu)}$. Докажем теперь, что $\|\pi_{\mathbf{x}}\| \geq \lambda_n^{(\nu)}$. Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{k,n}^{(\nu)}(x)|$. Поскольку множество D компактно, существует элемент $x_* \in D$, для которого $\varphi(x_*) = \lambda_n^{(\nu)}$. Построим теперь функцию $f_0 \in C[D]$, для которой выполняются соотношения $f_0(x_k) = \mathrm{sgn}(l_{n,k}(x_*))$ и $|f_0(x)| \leq 1$. Если $D = I$, то функция f определяется кусочно-линейной интерполяцией по узлам x_k. Существование такой функции в общем случае следует, например, из теоремы Титце о продолжении. Тогда

$$\|\pi_{\mathbf{x}}\| \geq \|\pi_{\mathbf{x}}(f_0)\| = \max_{x \in D} \| \sum_{k=1}^{n} f_0(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)}(x) \| \geq$$

$$\| \sum_{k=1}^{n} f_0(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)}(x) \| = \sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}^{(\nu)}(x_*)| = \lambda_n^{(\nu)}. \blacksquare$$

Определение 3. Числа $\lambda_n = \max\limits_{x \in D} \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x)|$ называются константами Лебега.

Теорема 3. Для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f выполняется неравенство

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n).$$

Доказательство. Пусть $q \in \mathcal{P}_n$ — произвольный элемент. Тогда, поскольку $\pi_{\mathbf{x}}$ проектор,

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| = \|f - q + q - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \leq \|f - q\| + \|\pi_{\mathbf{x}}(q) - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| =$$

$$\|f - q\| + \lambda_n \cdot \|f - q\| = (1 + \lambda_n) \cdot \|f - q\|.$$

Пусть теперь q_δ, такой полином из $\mathcal{P}_n$, для которого выполняется неравенство $\|f - q_\delta\| < \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) + \delta$. Тогда

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \|f - q_\delta\| < (1 + \lambda_n) \cdot (\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) + \delta).$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n). \blacksquare$$

Доказанное неравенство называется неравенством Лебега. Из полученной теоремы получаем оценку

$$\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \leq \|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n).$$

Легко доказывается следующая

Лемма 1. Пусть переменные $a \leq x \leq b$ и $-1 \leq s \leq 1$ и узлы интерполяции $x_k \in I = [a, b]$ $(k = 1, \ \ldots, n)$ и $s_j \in I_0 = [-1, 1]$ $(j = 1, \ \ldots, n)$ связаны линейными соотношениями

$$x = x(s) = \frac{b - a}{2} \cdot s + \frac{b + a}{2}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\lambda_n^{(\nu)}(I_0, \mathbf{s}) = (b - a/2)^\nu \cdot \lambda_n^{(\nu)}(I, \mathbf{x}).$$

Из леммы следует инвариантность констант Лебега для линейных преобразований узлов. Найдем константы Лебега для равномерно распределенных узлов интерполяции. Достаточно рассмотреть отрезок $[1, n]$ с узлами $x_k = k$. Полиномы Лагранжа имеют вид

$$l_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-j}{k-j}.$$

Лемма 2. Выполняются соотношения

$$1.\ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |k-j| = (k-1)! \cdot (n-k)!,$$
$$2.\ k! \cdot (n-k)! \leq (n-1)!,\ \ 1 \leq k < n,$$
$$3.\ \prod_{j=1}^{m} \left(j - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{m!}{2}\sqrt{m},\ \ m \geq 1.$$

Теорема 4. При $n > 1$ константы Лебега удовлетворяют неравенству

$$2^{n-3}/n^{3/2} \leq \lambda_n \leq 2^{n-1}.$$

Доказательство. Оценим константы Лебега снизу. Имеем

$$\lambda_n = \max_{1\leq x\leq n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |x-j|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \left|\frac{3}{2} - j\right|.$$

Согласно неравенству 3 леммы 2 получаем

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \left|\frac{3}{2} - j\right| = \frac{1}{|k-3/2|} \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{3}{2} - j\right| =$$

$$\frac{1}{2|k-3/2|}\prod_{j=1}^{n-1}\left|\frac{1}{2}-j\right| \geq \frac{(n-1)!}{4|k-3/2|\sqrt{n-1}} \geq \frac{(n-1)!}{4n\sqrt{n-1}}.$$

Поэтому

$$\lambda_n \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\left|\frac{3}{2}-j\right| \geq \frac{1}{4n\sqrt{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$\frac{2^{n-1}}{4n\sqrt{n-1}} \geq 2^{n-3}/n^{3/2}.$$

Докажем справедливость оценки сверху для констант Лебега. Представим $x \in [1, n]$ в виде $x = l + s$, где $1 \leq l \leq n$ — целое число, а $|s| \leq \frac{1}{2}$. Предположим также, что $s \neq 0$. Тогда

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|x-j| = \frac{1}{|x-k|}\prod_{j=1}^{n}|x-j| =$$

$$\frac{1}{|l-k+s|}\prod_{j=1}^{n}|l-j+s| = \frac{1}{|l-k+s|}\prod_{j=-(n-l)}^{l-1}|j+s| =$$

$$\frac{|s|}{|l-k+s|}\prod_{j=1}^{l-1}|j+s|\cdot\prod_{j=1}^{n-l}|j-s| \leq \prod_{j=1}^{l-1}|j+s|\cdot\prod_{j=1}^{n-l}|j-s|.$$

При $s > 0$ всегда $l < n$ и, следовательно, выполнено неравенство

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|x-j| \leq l!(n-l)! \leq (n-1)!.$$

При $s < 0$ всегда $1 < l$ и, следовательно, выполнено неравенство

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}|x-j| \leq (l-1)!(n-l+1)! \leq (n-1)!.$$

При $s = 0$ это неравенство очевидно. Следовательно,

$$\lambda_n = \max_{1 \le x \le n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |x - j|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = 2^{n-1}. \blacksquare$$

Итак, при равномерном распределении узлов константы Лебега растут экспоненциально.

7 Лекция 7. Интерполяционный процесс. Погрешность интерполяции

Определение 1. Матрицей **X** интерполяционных узлов на отрезке $I = [a, b]$ называется бесконечная треугольная таблица чисел

$$\begin{array}{ccccc} x_{1,1} & & & & \\ x_{2,1} & x_{2,2} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

для которой: 1) $x_{n,k} \in I$ при $1 \le k \le n$, 2) при любом n выполняются неравенства $x_{n,1} < x_{n,2} < \ \dots < x_{n,n}$.

Из определения следует, что каждая строка такой матрицы определяет узлы интерполяции $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ \dots, x_{n,n})$. Следовательно, для $f \in C[a, b]$ матрица интерполяции определяет последовательность интерполяционных полиномов $p_{n-1} = p_{n-1}(\mathbf{X}, f) = \pi_n(\mathbf{x}_n, f) \in \mathcal{P}_n$. Эта последовательность называется интерполяционным процессом, отвечающим данной матрице интерполяционных узлов **X** и данной функции f.

Определение 2. Интерполяционный процесс $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ называется сходящимся для данной матрицы интерполяционных узлов **X** и данной функции $f \in [a,b]$, если для любого $x \in [a,b]$ существует предел и выполняется равенство

$$\lim_{n\to+\infty} p_{n-1}(\mathbf{X}, f)(x) = f(x), \;\; x \in I. \tag{7.1}$$

Интерполяционный процесс $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ называется равномерно сходящимся на отрезке I для данной матрицы интерполяционных узлов $\mathbf{X}$ и данной функции $f \in [a,b]$, если указанная выше сходимость является равномерной.

Возникает естественный вопрос: можно ли так выбрать матрицу интерполяции, чтобы для любой непрерывной функции интерполяционный процесс был бы равномерно сходящимся. Ответ на этот вопрос отрицателен. Это следует из следующей теоремы, показывающей неограниченный рост констант Лебега.

Теорема 1 (Фабер-Бернштейн). Для любой матрицы интерполяционных узлов $\mathbf{X}$ выполняются неравенства

$$\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_n) = \|\pi_n(\mathbf{x}_n)\| > \frac{1}{8}\sqrt{\pi}\cdot \ln n, \;\; n \geq 1. \tag{7.2}$$

Следствие 1. Для любой матрицы интерполяционных узлов $\mathbf{X}$ существует функция $f \in C[a,b]$, для которой последовательность интерполяционных полиномов $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ не сходится равномерно на I к f и, более того, последовательность $\|p_{n-1}(\mathbf{X}, f)\|_{C[I]}$ неограничена.

Доказательство. Допустим, что это не так и для некоторой матрицы $\mathbf{X}$ при любом $f \in C[a,b]$ последовательность $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ равномерно сходится к f на I. Следовательно, последовательность линейных непрерывных операторов $\pi_n(\mathbf{x}_n) : C[a,b] \to P_n \subset C[a,b]$ поточечно сходится. Тогда, поскольку $C[a,b]$ — полное нормированное пространство, по теореме Банаха-Штейнгауза, нормы операторов $\|\pi_n(\mathbf{x}_n)\| = \lambda_n$ ограничены, что противоречит теореме 1 ■.

Тем не менее справедлива

Теорема 2. Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда существует матрица интерполяционных узлов $\mathbf{X}$ на отрезке $[a,b]$, для которой интерполяционный процесс для функции f сходится равномерно.

Доказательство. Если f — алгебраический полином, то подходит любая матрица **X**. Будем предполагать теперь, что f не является алгебраическим полиномом. Пусть $p_{n-1} \in \mathcal{P}_n$ — его наилучшее приближение в пространстве $\mathcal{P}_n$. Согласно теореме Чебышева на отрезке $[a, b]$ разность $\Delta_n = f - p_{n-1}$ имеет альтернанс порядка $n + 1$, т.е. существуют точки $a \le y_{1,n} < y_{2,n} < \ \ldots < y_{n+1,n} \le b$, для которых $|\Delta_n(y_{k,n})| = \|\Delta_n\|$ и знаки $\Delta_n(y_{k,n})$ чередуются. Тогда существуют нули функции Δ_n

$$y_{1,n} < x_{1,n} < y_{2,n} < \ \ldots < x_{n,n} < y_{n+1,n}.$$

Рассмотрим матрицу интерполяции **X**, соответствующую полученным нулям. По построению, выполняются равенства $p_{n-1}(x_{k,n}) = f(x_{k,n})$ при $1 \le k \le n$. Тогда выполняется равенство

$$p_{n-1} = p_{n-1}(\mathbf{x}_n, f) = \pi_n(\mathbf{x}_n, f).$$

Погрешность интерполяции равна

$$\|f - p_{n-1}\| = \|f - \pi_n(\mathbf{x}_n, f)\| = \varepsilon(f, \mathcal{P}_n),$$

и, следовательно, по теореме Вейерштрасса

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_{n-1}\| = 0.$$

Поэтому p_{n-1} равномерно сходится к f. ■

Определение 3. Чебышевской системой узлов порядка n на отрезке $I_0 = [0, 1]$ называется система точек

$$\mathbf{x}_k^* = (x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \ \ldots, x_{n,n}^*),$$

где

$$x_{k,n}^* = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \ \ n \ge 1, \ \ 1 \le k \le n.$$

Теорема 3 (Бернштейн). Пусть $I = I_0 = [0, 1]$ и $\mathbf{X}^*$ — интерполяционная матрица из чебышевских узлов на отрезке I_0. Тогда

$$\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_k^*) < 8 + \frac{4}{\pi} \cdot \ln n, \ \ n \ge 1. \tag{7.3}$$

Из теорем 1 и 3 следует оценка

$$\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_k^*) \asymp \ln n, \;\; n \to \infty. \tag{7.4}$$

Определение 4. Чебышевской системой узлов порядка n на отрезке $I = [a, b]$ называется система точек

$$\mathbf{x}_k^* = (x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \;\ldots, x_{n,n}^*),$$

где

$$x_{k,n}^* = x_{k,n}^*(I) = \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + \frac{b+a}{2}, \;\; n \geq 1, \;\; 1 \leq k \leq n.$$

Вследствие инвариантности констант Лебега относительно линейных преобразований теорема Бернштейна и асимптотическая оценка справедливы для произвольной чебышевской системы узлов и представляют собой оптимальную систему узлов интерполяции. Согласно теореме 3 лекции 6 выполняется неравенство Лебега

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n). \tag{7.5}$$

Согласно теореме Вейерштрасса $\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \to 0$. Следовательно, в правой части неравенства (7.5) возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$ и предел зависит от скоростей сходимости сомножителей. Согласно теореме Джексона для функции $f \in W^r(M, [a, b])$ выполняется неравенство

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \leq (1 + \lambda_n) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \cdot \frac{MD_r}{n^r}, \tag{7.6}$$

где $\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x})$ и $D_r = (\pi r/2)^r / r!$. Теперь рост погрешности определяется константами Лебега. Рассмотрим чебышевскую систему узлов. Тогда по теореме Бернштейна при $n \geq n$ выполняется неравенство

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq \left(9 + \frac{4}{\pi}\ln n\right)\frac{MD_r}{n^r} \tag{7.7}$$

Поэтому справедливо

Следствие 2. Для любой функции $f \in W^r(M, [a,b])$ и $r \geq 1$ интерполяционный процесс, отвечающий матрице $\mathbf{X}^*$ чебышевских узлов на отрезке $[a,b]$ и функции f, равномерно сходится на этом отрезке к функции f. ■

Поэтому погрешность интерполяции для чебышевской системы узлов сходится к нулю со скоростью не меньшей чем $\asymp n^{-r} \cdot \ln n$. Для матрицы равноотстоящих узлов константы Лебега $\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_n^0)$ растут экспоненциально при $n \to \infty$ и правая часть неравенства (7.6) стремится к бесконечности при $n \to \infty$. В этом случае с помощью неравенств Лебега и Джексона нельзя получить никакой информации о поведении погрешности интерполяции.

Пример 1 (Бернштейн). Пусть $I = I_0 = [-1, 1]$, $f_0(x_0) = |x|$ для $x \in \mathbb{R}$. Тогда $f_0 \in W^1(1, I_0)$, но интерполяционный процесс, отвечающий функции f_0 и матрице равноотстоящих узлов на отрезке I_0, расходится всюду на отрезке I_0, кроме концов отрезка и точки $x = 0$.

Теорема 3. Пусть $I = [a,b]$ — отрезок, $n \geq 1$, $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)$ — система узлов интерполяции на I, $M > 0$ и $f \in W^n(M, I)$. Тогда выполняется неравенство

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq \frac{M(b-a)^n}{n!}. \tag{7.8}$$

Для доказательства потребуется

Лемма 1. Пусть m, ν — целые, $m \geq 1$, $m \geq \nu \geq 0$, $f \in C^m[I]$ и f имеет $k \geq m$ различных нулей на I. Тогда $f^{(n-\nu)}$ имеет не менее $k - \nu$ корней на отрезке I.

Задача 1. Докажите лемму 1. Указание: докажите по индукции, используя теорему Ролля.

Рассмотрим множество $W^n_*(M, I) = \{f \in C^n[I] \mid \|f^{(n)}\| \leq M\}$. Тогда справедлива

Лемма 2. Выполнено равенство $[W^n_*(M, I)] = W^n(M, I)$, где $[X]$ — замыкание множества X в пространстве $C[I]$.

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем теорему для $f \in W^n_*(M, I)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \pi_n(\mathbf{x}, f)(x) \in C^n[I]$.

Требуется доказать неравенство

$$|g(x)| \leq \frac{M(b-a)^n}{n!} \tag{7.9}$$

для всех $x \in I$. Если x_0 является одним из узлов интерполяции x_k, то $g(x) = g(x_k) = 0$, то неравенство (7.9), конечно, выполняется. Пусть $x_0 \neq x_k$ для всех $1 \leq k \leq n$. Тогда $l_n(x_0) = \prod\limits_{k=1}^{n}(x_0 - x_k) \neq 0$. Тогда определена функция

$$\xi(x) = g(x) - \frac{g(x_0)}{l_n(x_0)} \cdot l_n(x).$$

По построению для всех $0 \leq k \leq n$ выполняются равенства $\xi(x_k) = 0$. Поэтому, по лемме 1, существует точка $y \in I$, в которой выполнено равенство $\xi^n(y) = 0$. Поскольку $\pi_n(\mathbf{x}, f)(x)$ — многочлен степени меньшей n, а $l_n(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом равным 1, то $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ и выполняется равенство

$$0 = \xi^n(y) = f^{(n)}(y) - \frac{g(x_0)}{l_n(x_0)} \cdot n!.$$

Следовательно,

$$g(x_0) = \frac{f^{(n)}(y)}{l_n(x_0)n!}. \tag{7.10}$$

Поскольку $x_0 \in I = [a, b]$, очевидно, выполнено неравенство $|l_n(x_0)| \leq (b - a)^n$, а ввиду условия $f \in W_*^n(M, I)$ выполнено неравенство $|f^{(n)}(y)| \leq M$. Неравенство (7.9) следует теперь из (7.10).

В силу леммы 2 для произвольной $f \in W^n(M, I)$ при любом $\varepsilon > 0$ существует $f_\varepsilon \in W_*^n(M, I)$, для которого $\|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| = \|f - f_\varepsilon + f_\varepsilon - \pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon) + \pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon) - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq$$

$$\|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - \pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon)\| + \|\pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon) - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq$$

$$\varepsilon + \frac{M(b-a)^n}{n!} + \lambda_n(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon.$$

Переходя к пределу в полученном неравенстве при $\varepsilon \to 0$, получим (7.8).

Теорема 4. Пусть $f \in W^n(M, I)$. Тогда для целого $0 \le \nu < n$ выполняется неравенство

$$\|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| \le \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}. \tag{7.11}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f^{(\nu)}(x) - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}(x).$$

Согласно лемме 1 функция $g(x)$ имеет на отрезке $I = [a, b]$ не менее $n-\nu$ корней $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ \ldots, x_{n-\nu}^*)$. Заметим, что интерполяционный полином $\pi_{n-\nu}(\mathbf{x}^*, f^{(\nu)})$ совпадает с полиномом $\pi_n(\mathbf{x}, f)^(\nu)$ в узлах $\mathbf{x}^*$ и что оба полинома имеют степень $n-\nu$. Поэтому они тождественно равны. Следовательно, учитывая что $f^{(\nu)} \in W^{n-\nu}(M, I)$, согласно теореме 3 выполнено неравенство

$$\|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| = \|f^{(\nu)} - \pi_{n-\nu}(\mathbf{x}^*, f)^{(\nu)}\| \le \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}. \blacksquare$$

Следствие 3. Пусть $f \in W^n(M, I)$ и $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — произвольный набор вещественных чисел. Тогда для любого набора узлов **x** на отрезке $[a, b]$ и произвольного $0 \le \nu < n$ выполняется неравенство

$$\|f^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\| \le \|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| + \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x}) \max_{1 \le k \le n} |f(x_k) - \xi_k|.$$

Доказательство. Согласно теореме 4 выполнено неравенство

$$\|f^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\| \le \|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| + \|\pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\|$$

$$\le \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} + \|(\pi_n(\mathbf{x}, f) - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi))^{(\nu)}\|. \tag{7.11}$$

Пусть $\mathbf{f_x} = (f(x_1),\ \ldots, f(x_n))$. Тогда согласно определению констант Лебега выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\|(\pi_n(\mathbf{x}, f) - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi))^{(\nu)}\| &= \|(p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f_x}) - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi))^{(\nu)}\| \\ &= \|(p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f_x} - \Xi))^{(\nu)}\| \\ &\le \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x})\|\mathbf{f_x} - \Xi\| \\ &= \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x}) \max_{1\le k\le n} |f(x_k) - \xi_k|.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|f^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\| \le \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} + \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x}) \max_{1\le k\le n} |f(x_k) - \xi_k|.\blacksquare$$

В следствии 3 получена оценка погрешности аппроксимации функции и ее производных при заданных приближениях значений функций в некоторых узлах.

Задача 1. Для произвольной функции $f \in C^n[a, b]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots, x_n)$ и любого $x \in [a, b]$

$$f(x) = \pi_n(\mathbf{x}, f)(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k),$$

где $y_1 < \xi < y_2$, а $y_1 = \min\{x, x_1,\ \ldots, x_n\}$ и $y_1 = \max\{x, x_1,\ \ldots, x_n\}$.

Задача 2. Пусть $n \ge 1$, $f \in C^n[a, b]$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*,\ \ldots, x_n^*)$ — чебышевские интерполяционные узлы на $[a, b]$, $x_k^* = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k-1}{2n\pi} + \frac{a+b}{2}$, $1 \le k \le n$. Докажите, что при $a = -1$, $b = 1$

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}^*, f)\| \le \frac{1}{2^{n-1} n!} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)|.$$

Задача 3. Пусть $f \in C[a, b]$ — ограничение целой функции. Тогда для произвольного $q > 0$ найдется $A > 0$, что для любой системы узлов $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots, x_n)$ на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство $\|f - \pi(\mathbf{x}, f)\| \le Aq^n$. Вывести из этого, что интерполяционный процесс, отвечающий произвольной интерполяционной матрице $\mathbf{X}$ на отрезке $[a, b]$ равномерно сходится к функции f.

Задача 4. Пусть $f \in C^\infty[a,b]$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \le BA^n$ для всех $n \ge 1$ и некоторых констант $A > 0$ и $B > 0$. Докажите, что

а) интерполяционный процесс, отвечающий произвольной матрице интерполяционных узлов на $[a,b]$ равномерно на $[a,b]$ сходится к f,

б) функция f аналитична на $[a,b]$. Рассмотрите примеры $f(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

8 Лекция 8. Интерполяция периодических функций

Рассмотрим сначала общую задачу интерполяции. Итак, пусть задано бесконечное компактное множество D, пространство непрерывных на нем функций $C[D]$ и конечномерное подпространство $V \subset C[D]$ с базисом $\varphi_1, \ \dots, \varphi_n$. Элементы пространства V будем называть многочленами.

Определение 1. Пусть заданы произвольные n различные точки $x_1, \ \dots, x_n \in D$, называемые узлами интерполяции, и произвольные вещественные числа $y_1, \ \dots, y_n$. Элемент $\varphi \in V$ называется интерполяционным многочленом, если $\varphi(x_k) = y_k$.

Предложение 1. Задача интерполяции всегда разрешима, причем однозначно, на векторном пространстве $V \subset C[D]$ для любых n узлов интерполяции и любых вещественных векторов $\mathbf{y} = (y_1, \ \dots, y_n)$ тогда и только тогда, когда V — чебышевское подпространство размерности $n + 1$.

Доказательство. Пусть V — чебышевское подпространство размерности $n+1$. Тогда согласно предложению 1 лекции 2 задача интерполяции всегда однозначно разрешима на n узлах. Предположим теперь, что задача интерполяции всегда однозначно разрешима. Пусть подпространство V не чебышевское. Тогда существует элемент $\varphi_0 \ne 0$ подпространства V, имеющий более $\dim V - 1$ корней. Пусть $x_1^0, \ \dots, x_n^0$ — любые различные корни многочлена φ_0. Пусть φ произвольное решение интерполяционной задачи с узлами $x_1^0, \ \dots, x_n^0$. Тогда эта задача интерполяции имеет также решение $\varphi + \varphi_0 \ne \varphi$, т.е. задача интерполяции имеет неединственное решение. ■

Из приведенного предложения и теоремы Мэрхьюбера следует, что задача интерполяции содержательна только на пространствах функций $C[a,b]$ и $C[\mathbf{S}^1]$. Задача интерполяции для пространства функций $C[a,b]$ была исследована в лекциях 6 и 7. Рассмотрим теперь соответствующую задачу в пространстве $C[\mathbf{S}^1]$. Интерполировать будем в чебышевских подпространствах $\mathcal{T}_{2n+1}$. Отображение $\exp : \mathbb{R} \to \mathbf{S^1}$ задает изоморфизм пространства 2π-периодических функций на вещественной прямой и пространством $C[\mathbf{S}^1]$.

Поскольку подпространство $\mathcal{T}_{2n+1} \subset C[\mathbf{S}^1]$ чебышевское, согласно предложению 1 лекции 2 выполняется

Предложение 2. Пусть $x_1, \ \ldots, x_{2n+1} \in [0, 2\pi)$ — произвольные попарно различные точки, а $f_1, \ \ldots, f_{2n+1}$ — произвольные вещественные числа. Тогда существует и притом единственный вещественный тригонометрический многочлен $T(x)$ степени $\leq n$, для которого

$$T(x_k) = f_k. \blacksquare$$

Интерполяционный полином $p_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$, принимающий на узлах $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)$ значения $\mathbf{f} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_n))$ для некоторой периодической (с периодом 2π) функции f, называется интерполяционным полиномом функции f на узлах $\mathbf{x}$ и обозначается $T(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \in \mathcal{T}_{2n+1}$. Пусть $\delta_j = (\delta_{j,1}, \ \ldots, \delta_{j,n})$, где $\delta_{j,i}$ — символы Кронекера. Тогда полиномы $\tau_{n,j} = \tau_{n,j}(\mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x}, \delta_j)$ называются фундаментальными полиномами системы интерполяционных узлов $\mathbf{x}$. С помощью фундаментальных полиномов тригонометрический полином $T_n(\mathbf{x}, \mathbf{f})$ можно представить в виде, являющемся аналогом формы Лагранжа алгебраического интерполяционного полинома

$$T_n(\mathbf{x}, \mathbf{f})(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} f_k \tau_{n,k}(\mathbf{x})(x), \quad x \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

При фиксации узлов интерполяции возникает оператор

$$\Pi_n = \Pi_n(\mathbf{x}) : C[\mathbf{S}^1] \to \mathcal{T}_{2n+1}, \quad n \geq 0,$$

определяемый равенством

$$\Pi_n(f) = \Pi_n(\mathbf{x})(f) = \Pi_n(\mathbf{x}, f) = T_n(\mathbf{x}, f_{\mathbf{x}}),$$

где

$$f_{\mathbf{x}} = (f(x_1),\ \dots, f(x_n)).$$

Следующее предложение доказывается также как и теорема 2 лекции 6.

Предложение 3. Линейные операторы $\Pi_n = \Pi_n(\mathbf{x})$ являются непрерывными проекторами и выполняется равенство

$$\|\Pi_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{2n+1} |\tau_{n,k}(x)|, \quad n \geq 0.\blacksquare$$

Определение 2. Числа $\Lambda_n = \Lambda_n(\mathbf{x}) = \|\Pi_n\|$ называются константами Лебега тригонометрической интерполяции относительно узлов $\mathbf{x} = (x_1,\ \dots, x_{2n+1})$.

Поскольку Π_n — проектор, выполняется неравенство Лебега:

Теорема 1. Для любых $f \in C[\mathbf{S}^1]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1,\ \dots, x_{2n+1}) \in [0, 2\pi)$ выполняется неравенство Лебега

$$\|f - \Pi_n(\mathbf{x})(f)\| \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n+1}), \quad n \geq 0. \blacksquare$$

Такая интерполяция используется сравнительно редко. Обычно рассматриваемую функцию представляют в виде суммы четной и нечетной функций и каждое из слагаемых интерполируют соответственно четными и нечетными тригонометрическими полиномами. Итак, имеются разложение

$$C[D] = C^+[D] \oplus C^-[D]$$

и

$$\mathcal{T}_{2n+1} = \mathcal{T}^+_{n+1} \oplus \mathcal{T}^-_n.$$

Однако подпространства $\mathcal{T}^+_{n+1}$ и $\mathcal{T}^-_n$ не являются чебышевскими. Поэтому узлы интерполяции не могут быть произвольными.

Предложение 4. 1. Пусть $x_1, \ \dots, x_{n+1} \in [0,\pi]$ — попарно различные узлы интерполяции, $f_1, \ \dots, f_{n+1} \ \in \ \mathbb{R}$ — произвольные числа. Тогда существует и притом единственный четный тригонометрический многочлен $T(x)$ степени не более n, для которого $T(x_k) = f_k$.
2. Пусть $x_1, \ \dots, x_n \in (0,\pi)$ — попарно различные узлы интерполяции, $f_1, \ \dots, f_n \ \in \ \mathbb{R}$ — произвольные числа. Тогда существует и притом единственный нечетный тригонометрический многочлен $T(x)$ степени не больше n, для которого $T(x_k) = f_k$. ■

Четный тригонометрический многочлен из предложения 4 обозначается через $T_n^+(\mathbf{x},\mathbf{f})$, а соответствующий нечетный многочлен через $T_n^-(\mathbf{x},\mathbf{f})$. Итак, определены операторы четной и нечетной тригонометрической интерполяции

$$\Pi_n^+ = \Pi_n^+(\mathbf{x}) : C^+[\mathbf{S}^1] \to \mathcal{T}_{n+1}^+, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_{n+1})$$

и

$$\Pi_n^- = \Pi_n^-(\mathbf{x}) : C^-[\mathbf{S}^1] \to \mathcal{T}_n^+, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_n),$$

задаваемые равенствами

$$\Pi_n^+(\mathbf{f}) = \Pi_n^+(\mathbf{x})(\mathbf{f}) = T_n^+(\mathbf{x},\mathbf{f}), \quad \mathbf{f}_\mathbf{x} = (f(x_1), \ \dots, f(x_{n+1})),$$

и

$$\Pi_n^-(\mathbf{f}) = \Pi_n^-(\mathbf{x})(\mathbf{f}) = T_n^-(\mathbf{x},\mathbf{f}), \quad \mathbf{f}_\mathbf{x} = (f(x_1), \ \dots, f(x_n)),$$

Определим четные и нечетные фундаментальные полиномы формулами:

$$C_{n,j} = C_{n,j}(\mathbf{x}) = T_n^+(\mathbf{x},\delta_j), \quad 1 \le j \le n+1,$$

где

$$\delta_j = (\delta_{1,j}, \ \dots, \delta_{n+1,j}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_{n+1}),$$

и

$$S_{n,j} = S_{n,j}(\mathbf{x}) = T_n^-(\mathbf{x},\delta_j), \quad 1 \le j \le n,$$

где

$$\delta_j = (\delta_{1,j}, \ \dots, \delta_{n,j}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_n),$$

Предложение 5. Π_n^+ при $n \geq 0$ и Π_n^- при $n \geq 1$ — линейные непрерывные операторы, являющиеся проекторами, причем

$$\|\Pi_n^+\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n+1} |C_{n,j}|,$$

$$\|\Pi_n^-\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n+1} |S_{n,j}|.\blacksquare$$

Числа $\Lambda_n^+ = \Lambda_n^+(\mathbf{x}) = \|\Pi_n^+(\mathbf{x})\|$ и $\Lambda_n^- = \Lambda_n^-(\mathbf{x}) = \|\Pi_n^-(\mathbf{x})\|$ называются константами Лебега четной и нечетной интерполяций относительно системы узлов **x**. Справедлива теорема Лебега.

Теорема 2. 1. Для любых $f \in C^+[\mathbf{S}^1]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in [0, \pi]$ выполняется неравенство

$$\|f - \Pi_n^+(\mathbf{x})(f)\| \leq (1 + \Lambda_n^+)\varepsilon(f, \mathcal{T}_{n+1}^+), \quad n \geq 0. \blacksquare$$

2. Для любых $f \in C^-[\mathbf{S}^1]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in (0, \pi)$ выполняется неравенство

$$\|f - \Pi_n^-(\mathbf{x})(f)\| \leq (1 + \Lambda_n^-)\varepsilon(f, \mathcal{T}_n^-), \quad n \geq 0. \blacksquare$$

Существуют многочлены T_n и U_n степени n такие, что

$$\cos nx + i \sin nx = T_n(\cos x) + i \sin x U_n(\cos x).$$

Теперь легко доказать следующее утверждение

Теорема 3. Соответствие $f(x) \mapsto F(\Theta) = f(\cos\Theta)$, где $f \in C[-1, 1]$ задает изометрический линейный изоморфизм пространства $C[-1, 1]$ на пространство $C^+[\mathbf{S}^1]$. При этом изоморфизме

а) подпространство $\mathcal{P}_{n+1}$ алгебраических многочленов степени не более n отображается на $\mathcal{T}_n^+ + 1$.

б) если $\Theta_1, \ldots, \Theta_{n+1} \in [0, \pi]$ — попарно различные точки, $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{n+1})$ и $\mathbf{x} = (\cos\Theta_1, \ldots, \cos\Theta_{n+1})$ — возникающие из этих точек системы узлов на отрезках $[0, \pi]$ и $[-1, 1]$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} C[-1,1] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\pi_{n+1}(\mathbf{x})"] & C^+[\mathbf{S}^1] \arrow[d, "\Pi_n^+(\Theta)"] \\ \mathcal{P}_{n+1}^+ \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{T}_{n+1}^+ \end{tikzcd}$$

коммутативна,

в) $\lambda_{n+1}(\mathbf{x}) = \Lambda_n^+(\Theta)$,

г) произведение функций в $C[-1,1]$ переходит в произведение функций в $C[\mathbf{S}^1]$, т.е. построенный изоморфизм является изоморфизмом банаховых алгебр $C[-1,1]$ и $C[\mathbf{S}^1]$. ■

В случае интерполяции нечетными тригонометрическими многочленами выполняется лишь следующая

Лемма 1. Отображение $f(x) \mapsto \sin x \cdot f(x)$ пространства $C[\mathbf{S}^1]$ в себя определяет линейное взаимно однозначное отображение пространства $C^+[\mathbf{S}^1]$ в пространство $C^+[\mathbf{S}^1]$ и изоморфизм $\mathcal{T}_n^+$ на $\mathcal{T}_n^-$. ■

Пусть $x_1, \ \ldots, x_n \in (0, \pi)$ — узлы интерполяции. Тогда следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} C^+[\mathbf{S}^1] \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_{n-1}^+(\mathbf{x})"] & C^-[\mathbf{S}^1] \arrow[d, "\Pi_n^-(\mathbf{x})"] \\ \mathcal{T}_n^+ \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{T}_n^- \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Теорема 4 (Фабер-Бернштейн). Пусть $\Theta_1, \ \ldots, \Theta_n \in [0, \pi]$, $n \geq 1$ — произвольные попарно различные точки и $\Theta = (\Theta_1, \ \ldots, \Theta_n)$. Тогда выполняется неравенство $\Lambda_{n-1}^+(\Theta) > \ln n / 8\sqrt{n}$. ■

Теорема 5 (Бернштейн). Пусть $\Theta_{n,k}^* = \frac{2k-1}{2n} \cdot \pi$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$ — равноотстоящие узлы на $[0, \pi]$, $\Theta_n^* = (\Theta_{n,k}^*, \ \ldots, \Theta_{n,n}^*)$, тогда $\Lambda_{n-1}^*(\Theta_n^*) < 8 + \frac{4}{\pi} \ln n$. ■

Используя неравенства Фавара и Лебега, получим для матрицы

$$\Xi^* = \left\{ \Theta_{n,k}^* = \frac{2k-1}{2n} \cdot \pi, \ 1 \leq k \leq n, \ n \geq 1 \right\}$$

равноотстоящих на $[0, \pi]$ узлов получим

$$\|f - \Pi^+_{n-1}(\Theta^*_n)(f)\| \le (9 + \frac{4}{\pi}\ln n)\mu\mathcal{K}_r n^{-r} \asymp n^{-r}\ln n,$$

где $n \ge 1$, $r \ge 1$, $f \in \mathcal{W}^r(M) \cap C^+[\mathbf{S}^1]$. Отсюда получаем

Следствие 1. Процесс интерполяции четными тригонометрическими многочленами, отвечающий матрице Ξ^* равноотстоящих на отрезке $[0, \pi]$ узлов, для любой четной функции $f \in \mathcal{W}^r(M)$, равномерно на $\mathbf{S}^1$ сходится к f со скоростью, не меньшей чем $\asymp n^{-r}\ln n$. ■

9 Лекция 9. Интерполяция лагранжевыми сплайнами

Пусть $D \subset \mathbb{R}^s$ — замкнутое подмножество.

Определение 1. Конечная совокупность $D_k \subset \mathbb{R}^s$, $k \in \mathcal{K}$ называется разбиением D, если

1. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k = D$
2. $\langle D_k\rangle \cap \langle D_j\rangle = \emptyset$ при $k \ne j$
3. $\langle D_k\rangle \ne \emptyset$,

где $\langle D\rangle$ — обозначает внутренность множества D.

Определение 2. Функция $l \in C[D]$ называется сплайн-функцией на конечном разбиении D_k, $k \in K$ множества D, если эта функция полиномиальна на каждом множестве D_k.

Поскольку $\langle D_k\rangle \ne \emptyset$, алгебраический многочлен на каждом множестве D_k определен однозначно. Число $\max\limits_{k\in\mathcal{K}} \deg l|_{D_k}$ называется порядком *сплайн-функции* l. Далее будет исследован случай $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$. В число узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_n)$ всегда будут входить начало и конец отрезка $a = x_1 < x_2 < \ \dots < x_n = b$. В качестве разбиения рассматриваются множества $D_k = I_k = [x_{k+1}, x_{k+2}]$, где $0 \le k \le n-2$. Пусть $n \ge r \ge 2$. Определим отображение

$$l_r = l_r(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to C[a, b].$$

Для вектора $\mathbf{f} = (f_1, \ \ldots, f_n)$ и $x \in [a,b]$ положим

$$l_r(\mathbf{x})(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_{r-1}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})(x), & x \in I_k, \quad 0 \le k \le n-r, \\ p_{r-1}(\mathbf{x}^{(n-r)}, \mathbf{f}^{(n-r)})(x), & x \in I_k, \quad n-r < k \le n-2, \end{cases}$$

где $\mathbf{x}^{(k)} = (x_{k+1}, \ \ldots, x_{k+r})$, $\mathbf{f}^{(k)} = (f_{k+1}, \ \ldots, f_{k+r})$ при $0 \le k \le n-r$ и $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(k)})$ — алгебраический интерполяционный полином степени меньшей r на отрезке $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}]$. Очевидно, что данное выше определение отображения l_r корректно, поскольку значения на узлах интерполяции определяются вектором $\mathbf{f}$. Из определения следует, что $l_r \in C[a,b]$.

Определение 3. Пусть $f \in C[a,b]$ и $a = x_1 < \ \ldots < x_n = b$. Положим $\mathbf{f} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_n))$. Тогда функция $l_r(\mathbf{x}, \mathbf{f})$ называется лагранжевым сплайном, или сплайн-интерполяцией порядка $< r$ функции f относительно узлов $\mathbf{x}$.

Множество всех лагранжевых сплайнов порядка $< r$, обозначаемое через $\mathcal{L}_n^{(r)} = \mathcal{L}_n^{(r)}(\mathbf{x}) = l_r(\mathbb{R}^n)$, является линейным подпространством в $C[a,b]$.

Определим также отображение $l_r(\mathbf{x}) : C[a,b] \to C[a,b]$ как композицию отображения $\omega(\mathbf{x}) : C[a,b] \to \mathbb{R}^n$, заданного формулой $\omega(\mathbf{x})(f) = \mathbf{f} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_n)$, и отображения $l_r = l_r(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to C[a,b]$.

Предложение 1. Выполняются следующие свойства сплайнов: 1. $l_r(\mathbf{x}, \mathbf{f})(x_k) = f_k$,

2. $l_r = l_r(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to C[a,b]$ — линейное непрерывное отображение, причем его образ $\mathcal{L}_n^{(r)}$ — линейное подпространство размерности n,

3. Сплайны $l_r(\mathbf{x}, \delta_k)$, где $1 \le k \le n$, а $\delta_k = (\delta_1, k, \ \ldots, \delta_n, k)$, образуют базис в пространстве $\mathcal{L}_n^{(r)}$, причем сплайн-функции однозначно представимы в виде

$$l_r(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot l_r(\mathbf{x}, \delta_k),$$

4. $\mathcal{L}_n^{(r)} \subset C[a,b]$ — замкнутое полное линейное подпространство,

5. $l_r(\mathbf{x}) : C[a,b] \to C[a,b]$ — непрерывное отображение, причем

$$\|l_r(\mathbf{x})\| \le \max_{0 \le k \le n-r} \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(k)}),$$

где $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}]$ и $\mathbf{x}^{(k)} = (x_{k+1}, \ \ldots, x_{k+r})$.

Доказательство. Пп.1-4 очевидны. Проверим 5. Из определения лагранжевого сплайна следует, что для любого $x \in [a, b]$ выполняется равенство $l_r(\mathbf{x}, f)(x) = p_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})(x)$ при некотором $0 \leq k \leq n - r$. Тогда

$$|l_r(\mathbf{x}, f)(x)| = |p_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})(x)| \leq \|f\| \cdot \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(\mathbf{k})}),$$

где $0 \leq k \leq n - r$. Следовательно,

$$|l_r(\mathbf{x}, f)| = \max_{x \in [a,b]} |l_r(\mathbf{x}, f)(x)| \leq \|f\| \cdot \max_{0 \leq k \leq n-r} \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(k)}),$$

т.е.

$$\|l_r(\mathbf{x})\| \leq \max_{0 \leq k \leq n-r} \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(k)}). \ \blacksquare$$

Очевидно, выполняется

Предложение 2. Отображение $l_r(\mathbf{x}) : C[a, b] \to C[a, b]$ является проектором на пространство лагранжевых сплайнов $\mathcal{L}_n^{(r)}$. $\blacksquare$

Упражнение 1. Докажите неравенство Лебега

$$\|f - l_r(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \|l_r\|)\varepsilon(f, \mathcal{L}_r^{(n)}),$$

где $f \in C[a, b]$, $2 \leq r \leq n$.

Однако, приведенной формулой нельзя воспользоваться, поскольку не исследована асимптотика наилучших приближений $\varepsilon(f, \mathcal{L}_r^{(n)})$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. Пусть $I = [a, b]$, $2 \leq r \leq n$, $f \in W^r(M, I)$, $\xi = (\xi_1, \ \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}$ — произвольный вектор, $h = (b - a)/(n - 1)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)$ — равноотстоящие узлы $x_k = a + (k - 1)h$, $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$\|f - l_r(\mathbf{x}, f)\| \leq M \cdot \frac{(r-1)^r}{r!} \cdot h^r + \lambda_r \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |f(x_j) - \xi_j|,$$

где $\lambda_r \leq 2^{r-1}$ — константы Лебега относительно системы узлов $\mathbf{x}$. Для $f \in W^1(M, I)$ и $n \geq 2$ справедлива оценка

$$\|f - l_2(\mathbf{x}, f)\| \leq 2Mh + \lambda_2 \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |f(x_j) - \xi_j|.$$

Доказательство. Поскольку отрезки $[x_{s+1}, x_{s+2}]$ при $0 \le s \le n-2$ покрывают отрезок $[a, b]$ и каждый из них лежит в некотором отрезке $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}]$, $0 \le k \le n-r$, то из определения лагранжева сплайна и следствия 3 лекции 7 следует, что

$$\|f - l_r(\mathbf{x}, \xi)\|_{C[I]} = \max_{1\le s\le n-2} \|f - l_r(\mathbf{x}, \xi)\|_{C[x_{s+1}, x_{s+2}]} \le$$

$$\max_{1\le k\le n-r} \|f - p_{r-1}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)})\|_{C[J_k]} \le$$

$$\max_{1\le k\le n-r} \left[M \cdot \frac{(r-1)^r}{r!} \cdot h^r + \lambda_r \max_{k+1\le j\le k+r} |f(x_j) - \xi_j|\right] \le$$

$$M \cdot \frac{(r-1)^r}{r!} \cdot h^r + \lambda_r \max_{1\le j\le n} |f(x_j) - \xi_j|.$$

Оценка для констант Лебега при равномерном распределении узлов следует из теоремы 4 лекции 6.

При $r = 1$ используются кусочно линейные аппроксимации $p_1((\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)})$ и оценка погрешности

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1(x)| &= \left| f(x) - f(x_1) - \tfrac{f(x_*) - f(x_1)}{x_* - x_1} \cdot (x - x_1) \right| \\ &\le 2M \cdot |x - x_1| \le 2M(b-a) \end{aligned}$$

для $f \in W^1(M, I)$

$$\begin{aligned} \|f - l_2(\mathbf{x}, \xi)\|_{C[I]} &= \max_{0\le k\le n-2} \|f - p_1(\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)})\|_{C[J_k]} \\ &\le \max_{1\le k\le n-2} \left[2Mh + \lambda_2 \max_{k+1\le j\le k+2} |f(x_j) - \xi_j|\right] \\ &\le 2Mh + \lambda_2 \max_{1\le j\le n} |f(x_j) - \xi_j|. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 2. Для матрицы равноотстоящих на отрезке $[a, b]$ узлов Ξ^* и любой $f \in C[I]$ последовательность лагранжевых сплайнов $l_r(\mathbf{x}_n^*, f)$ равномерно на I сходится к f.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса существует многочлен $p(x)$ такой, что $\|f - p\| < \varepsilon/(2(1 + \lambda_r))$, где λ_r — константа Лебега для равноотстоящих узлов.

Положим $M = \sup\limits_{x\in I} |p^{(r)}(x)| + 1$. Тогда $p \in W^r(M, I)$. Для равноотстоящих на $[a, b]$ узлов в силу п.5 предложения 1 и равенства всех констант Лебега $\lambda_r(J_k, (\mathbf{x}_n^*)^(k))$ выполняется неравенство $\|l_r(\mathbf{x}_n^*)\| \le \lambda_r$. Тогда, используя теорему 1 при $\xi_k = f(x_k)$, получим

$$\begin{aligned}\|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\| &\le \|f - p\| + \|p - l_r(\mathbf{x}_n^*, p)\| + \|l_r(\mathbf{x}_n^*, p - f)\| \\ &\le \|f - p\|(1 + \|l_r(\mathbf{x}_n^*)\|) + \|p - l_r(\mathbf{x}_n^*, p)\| \\ &\le (1 + \lambda_r)\|f - p\| + M\frac{(r-1)^r}{r!} \cdot 2^r(b-a)^r n^{-r} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + MC(r)n^{-r},\end{aligned}$$

где $C(r) = 2^r(b-a)^r/r!$. Тогда при $n > (2mC(r)/\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$ выполняется неравенство $\|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\| < \varepsilon$. ■

Теорема 2 демонстрирует значительное отличие аппроксимации лагранжевыми сплайнами по сравнению с аппроксимацией интерполяционными многочленами. Однако картина оказывается не столь радужной, если рассмотреть влияние гладких свойств функции на поведение погрешности аппроксимации. Оказывается, что построенные аппроксимации обладают весьма нежелательным свойством *насыщения*. Обозначим через $\delta_n^r(f) = \|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\|$, $f \in C[I]$. Пусть $f \in W^s(M) = W^s(M, I)$. Нас будет интересовать величина

$$\delta_n^r W^s(M) = \sup_f \in W^s(M)\delta_n^r(f), \quad s \ge 1, \quad n \ge r \ge 2,$$

называемая погрешностью аппроксимации лагранжевой интерполяции, отвечающей матрице равноотстоящих узлов на классе $W^s(M)$. Рассмотрим поведение этой величины при $n \to \infty$.

Теорема 3. 1) Если $1 \le s \le r$, то $\delta_n^r W^s(M) \asymp M|b-a|n^{-s}$ при $n \to \infty$, $n \ge r$, 2) если $s > r$, то $\delta_n^r W^s(M) = \infty$ при $n \ge r$, причем для любого $E > 0$ найдется функция $f_E \in W^s(M)$, для которой $\delta_n^r(f) \ge E|b-a|^r K_r n^{-r}$, где константа K_r зависит только от r.

Доказательство. 1) Пусть $1 \le s \le r$. Используя неравенства

Лебега и Джексона, получим для $f \in W^s(M)$

$$\begin{aligned}
\delta_n^r(f) &= \|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\|_{C[a,b]} \\
&\le \max_{0\le k\le n-r} \|f - p_{r-1}((\mathbf{x}_n^*)^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)\mathbf{x}}\|_{C[J_k]} \\
&\le \max_{0\le k\le n-r} (1+\lambda_r)\varepsilon(f|_{J_k}, \mathcal{P}_r) \\
&\le (1+\lambda_r)M\left(\frac{(r-1)(b-a)}{2(n-1)}\right)^s \left(\frac{\pi s}{2}\right)^s \frac{r^{-s}}{s!} \\
&\le M(1+\lambda_r)C_1(s)n^{-s},
\end{aligned}$$

где $C_1(s) = (b-a)^s(\pi s/2)^s/s!$. Поэтому $\delta_n^r W^s(M) \le M(1+\lambda_r)C_1(s)n^{-s}$. С другой стороны, пусть

$$g_n(x) = M\left(\frac{\pi n}{b-a}\right)^{-s} \sin\left(\pi(n-1)\frac{x-a}{b-a}\right), \ \ x \in [a,b].$$

Тогда $g_n \in W^s(M)$ и $l_r(\mathbf{x}_n^*, g_n) = 0$, поскольку $g_n(x_n^*k) = 0$ при $1 \le k \le n$. Поэтому $\delta_n^r(g_n) = \|g_n\| = C_2(s)Mn^{-s}$, где $C_2(s) = (b-a)^s\pi^-s$. Следовательно, $C_2(s)Mn^{-s} = \delta_n^r(g_n) \le \delta_n^r W^s(M)$ и значит, учитывая полученную выше оценку, $\delta_n^r W^s(M) \asymp M|b-a|n^{-s}$. 2) Достаточно проверить существование функции f_E, удовлетворяющей утверждению 2) теоремы. Положим $f_E(x) = \frac{Er!}{x^r}$. Тогда при $s > r$ имеем $f_E \in W^s(M)$. С другой стороны, для любого $x \in [a,b]$

$$\delta_n^r(f_E) = \|f_E - l_r(\mathbf{x}_n^*, f_E)\| \ge |f_E(x) - l_r(\mathbf{x}_n^*, f_E)(x)|.$$

Положим теперь $x = x_* = b - (b-a)/(2(n-1))$. Тогда $x_* \in J_{n-r} = [x_{n-r+1}, x_n]$ и, записывая погрешность интерполяции в форме Лагранжа, примененной к отрезку J_{n-r}, получим

$$\begin{aligned}
|f_E(x_*) - l_r(\mathbf{x}_n^*, f_E)(x_*)| &= |f_{E|_{J_{n-r}}}(x_*) - p_{r-1}((\mathbf{x}_n^*)^{(n-r)}, f_E|_{J_{n-r}})(x_*)| \\
&= \frac{|f_E^{(r)}(\xi)}{|r!}|(x_* - x_{n-r+1}) \ldots (x_* - x_n)| \\
&= \frac{E(2r-3)!!}{2^r \cdot r!}\left(\frac{b-a}{n-1}\right)^r \\
&\ge E|b-a|^r K_r n^{-r},
\end{aligned}$$

где $x_{n-r+1} < \xi < x_n$, $K_r = (2r-3)!!/(2^r \cdot r!)$. ■

Результат теоремы 3 показывает насыщаемость метода аппроксимации лагранжевыми сплайнами. Пока гладкость аппроксимируемой функции невелика, скорость аппроксимации возрастает вместе с гладкостью функции. Но при переходе через определенную границу (вторая половина теоремы 3), скорость аппроксимации перестает возрастать.

10 Лекция 10. Конечные разности и интерполяционный полином в форме Ньютона

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ множество всех вещественно-значных функций, заданных на всевозможных подмножествах D множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Две функции $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ и $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ считаются равными, если $D_1 = D_2$ и $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in D_1 = D_2$. Область определения функции f будем обозначать через D_f. На множестве $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ определены операции сложения и умножения на вещественные числа:

$$\begin{array}{ll} (f+g)(x) = f(x) + g(x) & x \in D_f + g = D_f \cap D_g \\ (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) & x \in D_\alpha f = D_f. \end{array}$$

Задача 1. Проверьте, что сложение функций коммутативно и ассоциативно, а функция $f_0 : \ R \to \mathbb{R}$ является единственным нулевым элементом.

Однако, если $D_f \neq \emptyset$, то элемент f не обратим. Пусть $h \in \mathbb{R}$ — число, которое будем называть далее шагом. Определим отображения

$$T_h : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \Delta_h : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

формулами

$$(T_h(f))(x) = f(x+h) \quad \text{и} \quad (\Delta_h(f))(x) = f(x+h) - f(x).$$

Оператор Δ_h можно представить также в виде $\Delta_h = T_h - E$, где E — единичный оператор $E(f) = f$. Оператор T_h называется оператором сдвига на шаг h, а оператор Δ_h — оператором первой конечной разности(или конечной разности первого порядка). Умножая оператор Δ_h на себя, получаем конечные разности высших порядков:

$$\Delta_h^0 = E, \quad \Delta_h^1 = \Delta_h, \quad \Delta_h^{n+1} = \Delta_h^n \circ \Delta_h^1.$$

Областью определения функции $\Delta_h^n(f)$ является множество $\bigcap\limits_{k=0}^{n}(D_f - kh)$. Оператор Δ_h^k называется оператором конечной разности k-го порядка. Если $D_f = [a,b]$, то $D_{\Delta_h^k}(f) = [a, b-kh]$ при $h > 0$ и $D_{\Delta_h^k}(f) = [a-kh, b]$ при $h < 0$.

Оператор конечной разности Δ_h удовлетворяет следующим свойствам:

1.Δ_h — *линейный оператор, т.е.* $\Delta_h(\alpha f + \beta g) = \alpha\Delta_h(f) + \beta\Delta_h(g)$,

2.*Если* f *дифференцируемая на отрезке или прямой функция, то функция* $\Delta_h(f)$ *также дифференцируема на отрезке или прямой и выполняется равенство* $(\Delta_h(f))' = (\Delta_h(f'))$.

3. *Если* f *определена и абсолютно непрерывна на* $[a,b]$ *и* $0 < h < b-a$*, то*

$$(\Delta_h f)(t) = \int_0^h f'(t+\tau)d\tau, \quad t \in [a, b-h]$$

При $a - b < h < 0$ *выполнено аналогичное равенство*

$$(\Delta_h f)(t) = \int_0^h f'(t+\tau)d\tau, \quad t \in [a-h, b]$$

4. $(\Delta_h^n f)(t) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(t+kh)$.

5. Если $f \in W^r(M,[a,b])$*,* $1 \le n \le r$*,* $h > 0$ *и* $0 < nh < b-a$ *выполняется равенство*

$$(\Delta_h^n f)(t) = \underbrace{\int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^{h_n}}_{n\ \text{элементов}} f'(t+\tau_1+\ \ldots+\tau_n)d\tau_1\ \ldots d\tau_n, \quad t \in [a, b-nh].$$

6. Если $f \in C^r([a,b])$, $h > 0$, $r \geq 1$, то для любого $t \in [a, b-rh]$ найдется точка $\xi \in [t, t+rh]$, для которой

$$(\Delta_h^r f)(t) = h^r f^{(r)}(\xi).$$

Если $h < 0$, то последнее равенство верно для $t \in [a-rh, b]$ и $\xi \in [t+rh, t]$.

7. Если $f \in W(M, [a,b]$, $r \geq 1$, то для любого t

$$|(\Delta_h^r f)(t)| \leq M|h|^r.$$

Из свойства 6 следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^r f)(t)}{h^r} = f^{(r)}(t)$$

для любого $t \in [a,b]$.

Определение 1. Алгебраические полиномы

$$\begin{array}{lcl} \Phi_n(x,h) & = & \dfrac{1}{n!h^n}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x-kh) \quad n \geq 1 \\ \Phi_0(x,h) & = & 1 \\ \Phi_{-1}(x,h) & = & 0 \end{array}$$

называются факториальными полиномами с шагом h. Перечислим основные свойства факториальных полиномов.

1.$\Phi_n(x-a,h)$ — *алгебраический многочлен относительно переменной x степени n, в частности, $\Phi_n(x-a,h) \in \mathcal{P}_{n+1}$.*

2.*Многочлены $\Phi_0(x-a,h),\ \ldots, \Phi_n(x-a,h)$ $n \geq 0$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_{n+1}$ всех алгебраических многочленов степени $\leq n$.*

3. *Если $n > 0$, то $\Phi_n(0,h) = 0$.*

4. $\Delta_h \Phi_n(x-a,h) = \Phi_{n-1}(x-a,h)$ *при $n \geq 0$.*

5. *Если $p \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, то*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_h^k p)(a) \Phi_k(x-a,h).$$

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана система из $n+1$ равноотстоящих узлов $x_k = a+kh$, $0 \le k \le n$, $h = (b-a)/n$, $n \ge 1$. Рассмотрим алгебраический интерполяционный полином $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$ функции f, построенный по первым $r \le n+1$ узлам $x_0, \ldots, x_{r-1}$, где $r \ge 1$, $\mathbf{x}^{(r)} = (x_0, \ldots, x_{r-1})$. Согласно свойству 5, для любого алгебраического полинома степени $< r$ имеет место тождество

$$p(x) = \sum_{k=0}^{r-1} (\Delta_h^k p)(a)\Phi_k(x-a,h).$$

Пусть теперь $p = p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$, тогда $p(a+lh) = f(a+lh)$ при $0 \le l \le r-1$. Поэтому, по свойству 4 конечных разностей, получим при $0 \le l \le r-1$

$$(\Delta_h^k p)(a) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l}\binom{k}{l} p(a+lh) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l}\binom{k}{l} f(a+lh) = (\Delta_h^k f)(a).$$

Следовательно, интерполяционный полином функции f относительно системы равноотстоящих узлов записывается в виде

$$p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} (\Delta_h^k f)(a)\Phi_k(x-a,h).$$

Эта форма интерполяционного полинома называется формой Ньютона.

Форма Ньютона имеет ряд преимуществ перед интерполяционной формой Лагранжа. Рассмотрим задачу рекуррентного вычисления многочленов $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$. Пусть вычислен многочлен $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$. Найдем $p_r(\mathbf{x}^{(r+1)}, f)$. Согласно формуле Ньютона

$$\begin{aligned} p_r(\mathbf{x}^{(r+1)}, f)(x) &= \sum_{k=0}^{r} (\Delta_h^k f)(a)\Phi_k(x-a,h) \\ &= p_{r-1}(\mathbf{x}^(r), f)(x) + (\Delta_h^r f)(a)\Phi_r(x-a,h). \end{aligned}$$

Следовательно, задача сводится к вычислению конечной разности $(\Delta_h^r f)(a)$ и значения в точке x факториального полинома $\Phi_r(x-a,h)$.

Последнее сделать очень просто, поскольку $\Phi_r(x-a,h) = \Phi_{r-1}(x-a,h)(x-(r-1)h)/(rh)$, а величина $\Phi_r(x-a,h)$ уже вычислена. Конечная разность $(\Delta_h^r f)(a)$ ищется с помощью рекуррентной процедуры, которая сводится к последовательному вычислению столбцов следующей треугольной таблицы

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
f(x_0) & & & & & & & & & & & & \\
 & \nwarrow & & & & & & & & & & & \\
 & & \Delta_h f(x_0) & & & & & & & & & & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & & & & & & & & & \\
f(x_1) & & & & \Delta_h^2 f(x_0) & & & & & & & & \\
 & \nwarrow & & \swarrow & & \nwarrow & & & & & & & \\
 & & \Delta_h f(x_1) & & & & \Delta_h^3 f(x_0) & & & & & & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & & \swarrow & & & & & & & \\
f(x_2) & & & & \Delta_h^2 f(x_1) & & & & . & & & & \\
 & \nwarrow & & \swarrow & & \nwarrow & & & & \nwarrow & & & \\
 & & \Delta_h f(x_2) & & & & \Delta_h^3 f(x_1) & & & & . & & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & \nwarrow & \\
f(x_3) & & & & \Delta_h^2 f(x_2) & & & & . & & & & . \\
 & \nwarrow & & \swarrow & & & & & & \nwarrow & & \swarrow & \\
 & & \Delta_h f(x_3) & & & & . & & & & . & & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & & & & & & \swarrow & & \nwarrow & \\
f(x_4) & & & & . & & & & . & & & & . \\
 & & & & & & & & & \nwarrow & & \swarrow & \\
 & & . & & & & . & & & & . & & \\
 & & & & & & & & & \swarrow & & & \\
. & & & & . & & & & . & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & . & & & & \Delta_h^3 f(x_{n-3}) & & & & & & \\
 & & & & & \swarrow & & & & & & & \\
f(x_{n-1}) & & & & \Delta_h^2 f(x_{n-2}) & & & & & & & & \\
 & \nwarrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
 & & \Delta_h f(x_{n-1}) & & & & & & & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
f(x_n) & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Самый левый столбец известен - это значения функции в узлах интерполяции. Каждый последующий столбец получается из предыдущего при помощи вычитания соседних элементов.

11 Лекция 11. Пример Бернштейна

Расмотрим многочлен

$$P(x) = \frac{(n-x)(n-x-1)\ \dots(2-x)}{n!}.$$

Запишем интерполяционную формулу Ньютона для $a = 0$ и $h = 1$. В этом случае

$$P(a) = 1, \quad P(a+h) = \frac{1}{n},$$
$$P(a+2h) = \ \dots = P(a+(n-1)h) = 0,$$

и потому

$$\Delta^k P(a) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} P(a+rh) = (-1)^k \frac{n-k}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{(n-x)(n-x-1)\ \dots(2-x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n} \frac{x(x-1)\ \dots(x-k+1)}{k!}.$$

Полагая, в частности, $x = n+m$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n} \binom{n+m}{k} = (-1)^{n-1} \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!n!}.$$

В последнем равенстве сделаем замену $k = n-i$, добавим нулевое слагаемое и домножим на n. Получим

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} i \binom{n+m}{n-i} = (-1)^{n-1} \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}.$$

Теперь поменяем ролями n и m, поделим полученное равенство на n и преобразуем биномиальные коэффициенты. Получим

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\frac{i}{n}\binom{n+m}{n+i} = (-1)^{m-1}\frac{(n+m-2)!}{(m-1)!n!}. \tag{11.1}$$

Теорема (Бернштейн). Интерполяционный полином, построенный для функции $|x|$ по равноотстоящим узлам сегмента $[-1,1]$ не сходится ни в одной из точек этого сегмента, отличной от $-1, 0$ и 1.

Доказательство. Доказательство проведем для точек из интервала $(-1,0)$. Определим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Так как $|x| = 2\varphi(x) - x$, то достаточно установить расходимость интерполяционного процесса для функции $\varphi(x)$. Рассмотрим $2n+1$ узлов вида

$$x_k = -1 + \frac{k-1}{n} \quad (k = 1, 2, \ \dots, 2n+1)$$

и обозначим $L_{2n+1}(x)$ через соответствующий интерполяционный полином функции $\varphi(x)$. Согласно интерполяционной формуле Ньютона имеем

$$L_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n} n^k \frac{\Delta^k\varphi(-1)}{k!}(x-x_1)(x-x_2)\ \dots(x-x_k) \qquad 11.2.$$

В силу п.4 свойств разностного оператора выполняется равенство

$$\Delta^k\varphi(-1) = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\varphi\left(-1+\frac{r}{n}\right).$$

Если $r \le n$, то $\varphi\left(-1+\dfrac{r}{n}\right) = 0$, поэтому при $k = 0, 1, \ \dots, n$

$$\Delta^k\varphi(-1) = 0.$$

Если же $r = n + i$, где $i = 1, 2, \ \dots, n$, то $\varphi\left(-1 + \dfrac{r}{n}\right) = \dfrac{i}{n}$. Поэтому согласно формуле (11.1)

$$\begin{aligned}\Delta^{n+m}\varphi(-1) &= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-1}\binom{n+m}{n+i}\frac{i}{n}\\ &= (-1)^{m-i}\frac{(m+n-2)!(m-1)!}{n!}\end{aligned}$$

при $m = 1, 2, \ \dots, n$. Поэтому равенство (11.2) приобретает вид

$$L_{2n+1}(x) = \sum_{m=1}^{m}(-1)^{m-1}\frac{(m+n-2)!(m-1)!}{n!}\frac{n^{n+m}}{(n+m)!}(x+1)\cdot$$

$$\cdot\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \ \dots \left(x + \frac{1}{n}\right) x \left(x - \frac{1}{n}\right) \ \dots \left(x - \frac{m-1}{n}\right). \qquad (11.3)$$

Заметим, что при всех $-1 \leq x \leq 0$ все знаки в последней сумме одинаковы. Поэтому

$$|L_{2n+1}(x)| \geq \frac{\left|(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right) \ \dots \left(x-1+\frac{1}{n}\right)\right|}{2(2n-1)(n!)^2 n^{2n}}.$$

$\square$