

# Решетки, алгоритмы и современная криптография

Шокуров А.В, Кузюрин Н.Н, Фомин С.А

12 января 2023 г.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
0.1 Введение. История криптографии . . . . .	3
<b>1 Основные понятия криптографии и теории сложности</b>	<b>7</b>
1.1 Дискретный логарифм. Обмен ключами. . . . .	7
1.2 Дискретный логарифм и криптосистема Эль Гамала . . . . .	9
1.3 Односторонние функции . . . . .	10
1.4 Система RSA и ее анализ . . . . .	13
1.5 Основные понятия теории сложности . . . . .	19
<b>2 Кольца, поля, решетки</b>	<b>20</b>
2.1 Кольца . . . . .	20
2.1.1 Кольца. Основные определения . . . . .	20
2.1.2 Идеалы и гомоморфизмы колец . . . . .	24
2.1.3 Коммутативные кольца . . . . .	29
2.1.4 Факториальные кольца . . . . .	31
2.1.5 Кольца многочленов . . . . .	34
2.1.6 Однозначность разложения на простые множители в кольце многочленов . . . . .	35
2.1.7 Кратные корни . . . . .	39
2.2 Поля . . . . .	40
2.2.1 Расширения полей . . . . .	40
2.2.2 Алгебраическое замыкание . . . . .	44
2.2.3 Конечные поля . . . . .	47
2.2.4 Корни из единицы . . . . .	50

2.3	Решетки . . . . .	53
2.3.1	Введение в решетки . . . . .	53
2.3.2	Критерий полноты решетки. Теорема Минковского . . . . .	60
2.4	Некоторые задачи на решетках . . . . .	65
2.5	Применение алгебры. Полиномиальный алгоритм проверки простоты чисел . . . . .	68
2.6	Полиномиальная проверка простоты . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Алгоритмические аспекты теории решеток</b>	<b>80</b>
3.1	Кратчайший ненулевой вектор решетки . . . . .	80
3.2	Решетки . . . . .	80
3.2.1	Введение в решетки . . . . .	80
3.2.2	Критерий полноты решетки. Теорема Минковского . . . . .	87
3.3	Некоторые задачи на решетках . . . . .	92
3.4	Алгоритм Гаусса. Приближенные алгоритмы. . . . .	95
3.4.1	Алгоритм Гаусса . . . . .	96
3.4.2	LLL-алгоритм . . . . .	102
3.4.3	Аппроксимация решения задачи CVP: задача ACVS . . . . .	111
3.5	О сложности задач CVP и SVP . . . . .	114
3.6	Результаты Айтаи . . . . .	120
3.7	Результаты Айтаи . . . . .	123
<b>4</b>	<b>Некоторые криптосистемы на решетках</b>	<b>127</b>
4.1	NTRU . . . . .	127
4.1.1	Описание NTRU-шифрования . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Обзор современных результатов по алгоритмическим аспектам теории решеток</b>	<b>132</b>
	<b>Списки иллюстраций</b>	<b>133</b>
	<b>Список алгоритмов</b>	<b>134</b>

# Введение

## 0.1 Введение. История криптографии

Криптография занимается разработкой методов преобразования (шифрования) информации с целью ее защиты от незаконных пользователей. Предполагается, что имеется круг законных пользователей информации, а также незаконный пользователь (противник), стремящийся овладеть защищаемой информацией.

Криптография занимается методами преобразования информации, которые не позволили бы противнику извлечь ее из перехватываемых сообщений (зашифрованной информации). Предполагается, что обмен зашифрованными сообщениями происходит между законными пользователями А (Алиса) и В (Боб) информации по открытому каналу связи и противник (Ева) имеет возможность перехватить все или часть сообщений.

*Вскрытие (взламывание) шифра* — процесс получения защищаемой информации из зашифрованного сообщения без знания примененного шифра.

Долгое время занятие криптографией было уделом чудаков-одиночек. Среди них были одаренные ученые, дипломаты, священнослужители. Этот период развития криптографии длился с незапамятных времен до начала XX века, когда появились первые шифровальные машины.

Многие из древних шифров принадлежат одному из двух типов: *шифр замены* и *шифр перестановки*.

Типичными примерами шифра замены являются *шифр Цезаря* и «пляшущие человечки» Артура Конан Дойля. Его математическое описание весьма просто. Пусть  $X$ ,  $Y$  два алфавита, открытого и зашифрованного текстов

соответственно, состоящие из одинакового числа букв. Пусть  $g : X \rightarrow Y$  — произвольное взаимно-однозначное отображение. Тогда шифр замены преобразует открытый текст  $x_1x_2 \dots x_n$  в шифртекст  $g(x_1)g(x_2) \dots g(x_n)$ . В частности, в шифре Цезаря  $g$  заменяет каждую букву открытого текста на третью после нее в алфавите, причем алфавит считается круговым — после последней буквы идет первая и т. д.

Методы вскрытия такого шифра не представляют труда и описаны в известных рассказах «Золотой жук» Э. По и «Пляшущие человечки» А. Конан Дойля.

Шифр перестановки, как и следует из его названия, осуществляет перестановку букв в открытом тексте. Примером шифра перестановки является шифр «Сцитала», известный со времен войны Спарты против Афин в V веке до н.э. Открытый текст разбивается на отрезки равной длины и каждый отрезок шифруется независимо. Если длина отрезка равна  $n$  и  $\sigma$  — некоторая перестановка множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , то шифр перестановки отрезок открытого текста  $x_1x_2 \dots x_n$  переводит в отрезок шифртекста  $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ . В настоящее время этот шифр также не представляет трудностей для вскрытия.

В общем случае можно сказать, что функция шифрования  $E$  (от английского слова encryption) ставит в соответствие каждому открытому тексту  $m$  шифртекст  $C$  (от английского слова cyphertext), т. е.  $E(m) = C$ . Функция дешифрования  $D$  (от английского слова decryption) ставит в соответствие каждому зашифрованному тексту  $C$  шифртекст  $m$  (от английского слова cyphertext), причем  $D(E(m)) = m$ .

Поскольку создание хорошего шифра дело весьма трудоемкое, то издавна в криптографии стали использовать идею *сменного ключа*. Под ключом понимают сменный элемент шифра, который применяется для шифрования конкретного сообщения. Например, в шифрах типа шифра Цезаря ключом является величина сдвига букв шифртекста относительно букв открытого текста, в шифрах перестановки — ключом является перестановка  $\sigma$ .

На протяжении многих веков среди специалистов не утихали споры о стойкости различных шифров и о возможности построения абсолютно стойкого шифра. Опыт говорит о том, что шифры, считавшиеся своими создателями абсолютно стойкими, вскрывались рано или поздно, а стойкость

шифра обычно переоценивается его разработчиками. В теоретической криптографии существуют два основных подхода к определению стойкости криптосистем: теоретико-информационный и теоретико-сложностной. При теоретико-информационном подходе предполагается, что противник не сможет получить никакой информации из перехватываемых им зашифрованных сообщений. Такая абсолютная стойкость, как показал еще К. Шеннон, является достижимой (например, в шифре Вернама), однако требует, чтобы длина ключа была не меньше длины передаваемого сообщения. Это жесткое ограничение заставляет использовать такие стойкие шифры исключительно для передачи редких и очень важных сообщений. Во всех остальных случаях, приходится обращаться к теоретико-сложностному подходу, к обсуждению которого мы и переходим.

В идеале, хорошо бы получить теоретические оценки стойкости шифра, что могло бы гарантировать невозможность вскрытия выбранного шифра, за период, скажем, 20 лет. Однако, существующий уровень развития теории сложности вычислений не дает нужных теорем, поскольку они относятся к нерешенной *проблеме получения нижних оценок вычислительной сложности задач*. Однако, на практике, для повышения обоснованности стойкости шифра это требование заменяется на требование включения в задачу вскрытия шифра *трудной математической задачи*.

Самыми известными на сегодняшний день вычислительно трудными задачами такого сорта являются проблема вычисления *дискретного логарифма и факторизация* (разложение на множители) целых чисел. Использование этих задач для построения шифров описано в последующих разделах, а пока мы закончим обсуждение теоретико-сложностной компоненты в криптографии.

Итак, для задач факторизации чисел (разложения на множители) и нахождения дискретного логарифма в настоящее время неизвестны эффективные (полиномиальные) алгоритмы, несмотря на то, что эти задачи интенсивно исследовались в последние 30 лет. Конечно, такой аргумент не должен нас вполне успокаивать, так как вся история науки (в частности, алгоритмическая теория чисел) показывает, что многие задачи, казавшиеся трудными, решаются затем достаточно просто. Ярким примером подобного результата является недавнее (в 2002 г.) открытие полиномиального детерминированного алгоритма проверки простоты числа, который будет

рассмотрен нами в дальнейшем.

Это явилось побудительным стимулом в криптографии к поиску других вычислительно трудных задач, на которых можно строить стойкие крипто-системы. Еще одним таким стимулом явились результаты Питера Шора о существовании полиномиальных алгоритмов решения задач дискретного логарифмирования и разложения числа на множители на так называемых квантовых вычислителях. Квантовая модель вычислений является вполне реалистичной, хотя споры о возможности создания квантового компьютера не утихают. Скорее это является «тревожным звонком», который может привести затем к построению эффективных алгоритмов решения указанных задач и на обычных моделях вычислений. Все это заставляет искать задачи, для которых неизвестны эффективные квантовые алгоритмы.

В целом можно констатировать, что больших успехов в таком поиске достигнуто не было. Однако, одна интересная задача была найдена, причем с теоретическим обоснованием ее труднорешаемости. Речь идет о результатах венгерского математика Миклоша Айтаи, опубликованных им в 1996 г., о трудности задачи поиска короткого вектора в решетке. Ему удалось доказать, что можно построить случайную решетку с коротким вектором в ней такую, что любой алгоритм нахождения этого вектора в данной случайной решетке можно конвертировать в эффективный алгоритм нахождения достаточно короткого вектора в *любой решетке*. Эти результаты положили начало новому направлению в криптографии, которое на Западе получило название «Lattice based cryptography».

# Глава 1

## Основные понятия криптографии и теории сложности

*Связь с теорией чисел и теорией сложности.*

### 1.1 Дискретный логарифм. Обмен ключами.

Напомним некоторые сведения из алгебры. Для любого простого числа  $p$  множество  $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$  является полем с операциями умножения и сложения по модулю  $p$ . Известно, что  $\mathbf{Z}_p^* = \mathbf{Z}_p - \{0\}$  образует циклическую группу по умножению. Любой порождающий элемент этой группы называется примитивным элементом.

#### **Задача 1.** «Дискретный логарифм»

*Даны примитивный элемент  $g$ ,  $b \neq 0$ , простое число  $p$ . Найти  $x$  такое, что*

$$g^x \equiv b \pmod{p}.$$

Опишем сейчас применение дискретного логарифма для задачи формирования общего секретного ключа двумя пользователями (задача 2), связанными открытым (для противника) каналом связи.

#### **Задача 2.** «Формирование секретного ключа»



Абоненты  $A$  и  $B$  взаимодействуют по открытому каналу связи. Могут ли они, не имея вначале никакой секретной информации, организовать обмен так, чтобы в конце у них появился общий секретный ключ. Предполагается, что пассивный противник может перехватить все сообщения, которыми они обмениваются.

Диффи и Хеллман предложили решать эту задачу с помощью дискретного логарифма (алгоритм 1).

---

### Алгоритм 1 Протокол выработки общего секретного ключа

---

1.  $A$  и  $B$  независимо друг от друга выбирают по одному натуральному числу  $X_A$  и  $X_B$ . Эти элементы они держат в секрете.
2. Каждый из них вычисляет новый элемент

$$Y_A \equiv a^{X_A} \pmod{p}, \quad Y_B \equiv a^{X_B} \pmod{p},$$

причем числа  $p$  и  $a$  считаются общедоступными. Потом они обмениваются этими элементами по каналу связи.

3.  $A$  получив  $Y_B$  и зная свой секретный элемент  $X_A$  вычисляет новый элемент

$$Y_B^{X_A} = (a^{X_B})^{X_A} \pmod{p}.$$

Аналогично поступает  $B$ :

$$Y_A^{X_B} = (a^{X_A})^{X_B} \pmod{p}.$$

После этого у  $A$  и  $B$  появился общий элемент  $a^{X_A X_B} \pmod{p}$ , который и объявляется общим ключом.

---

**Задача А.** Противник знает  $p$ ,  $a$ ,  $a^{X_A}$ ,  $a^{X_B}$ , но не знает  $X_A$  и  $X_B$ , и хочет узнать  $a^{X_A X_B}$ .

**Гипотеза Диффи-Хеллмана.** Задача А — вычислительно трудна.

В настоящее время нет алгоритмов решения задачи А, более эффективных чем дискретное логарифмирование. А это — трудная математическая

задача.

## 1.2 Дискретный логарифм и криптосистема Эль Гамала

Напомним сначала общее описание криптосистемы блочного шифрования. Открытый текст разрезается на куски одинаковой длины, которые шифруются независимо с помощью некоторого преобразования  $E$  следующим образом. Куску открытого текста  $m$  и ключу  $k$  ставится в соответствие зашифрованный текст  $E(m, k)$ . В криптосистемах вероятностного шифрования куску открытого текста  $m$  и ключу  $k$  ставится в соответствие зашифрованный текст  $E(m, k, r)$ , зависящий еще от строки  $r$  случайных бит, которая выбирается заново для каждой пары  $(m, k)$ . Таким образом, в системах вероятностного шифрования одной и той же паре  $(m, k)$  соответствуют разные шифртексты.

*Криптосистема Эль Гамала* является криптосистемой вероятностного шифрования, основанной на использовании дискретного логарифма. Пусть  $G$  — циклическая группа порядка  $p$  и  $g$  — ее порождающий элемент. В качестве секретного ключа криптосистемы выбирается случайный элемент  $x$  группы  $Z_{p-1}$ . Соответствующий открытый ключ вычисляется по формуле  $y = g^x$ . Криптограмма открытого текста  $m \in G$  вычисляется с помощью функции шифрования

$$E(y, m) = (y^r m, g^r),$$

где  $r$  — случайный элемент группы  $Z_{p-1}$ , т. е. число  $r$  выбирается всякий раз заново, независимо и равномерно.

Дешифрование криптограммы  $(c_1, c_2)$  выполняется следующим образом. Сначала вычисляется  $c_2^x = g^{rx}$ , откуда затем вычисляется  $m = c_1/c_2^x$ .

*Стойкость шифра* основана на трудности вычисления  $x$  по известному  $y$ , т. е. на трудности вычисления дискретного логарифма. Криптосистема Эль Гамала является криптосистемой вероятностного шифрования. При этом одному открытому тексту соответствуют различные шифртексты. Ее функция шифрования гомоморфна относительно операции умножения откры-

тых текстов: криптограмма произведения может быть вычислена как произведение (попарное) криптограмм сомножителей.

Если  $E(y, m_1) = (y^{r_1} m_1, g^{r_1})$  и  $E(y, m_2) = (y^{r_2} m_2, g^{r_2})$ , то  $E(y, m_1 m_2)$  можно получить в виде  $(y^{r_1} y^{r_2} m_1 m_2, g^{r_1} g^{r_2})$ .

Функция шифрования криптосистемы Эль Гамалья обладает свойством рандомизации. Криптограмму произведения, полученную в указанном выше виде, можно рандомизировать, выбрав случайное число  $r$  из  $Z_{p-1}$  и домножив первый элемент криптограммы на  $y^r$ , а второй — на  $g^r$ .

Таким образом будет получена криптограмма  $(y^{r_1} y^{r_2} y^r m_1 m_2, g^{r_1} g^{r_2} g^r)$ , связь которой с исходными криптограммами «затемнена».

## 1.3 Односторонние функции

Трудности с обоснованием стойкости криптосистем привели к тому, что стали выделять некий примитив, существование которого позволяет строить стойкие криптосистемы. В качестве основного примитива в настоящее время рассматриваются односторонние функции.

Центральным понятием «новой криптографии», которая начала формироваться с конца 70-х годов XX века после исторической статьи Диффи и Хеллмана, является понятие односторонней функции. Не совсем строго односторонней называют эффективно вычислимую функцию, обратная к которой трудно вычислима. Итак,

**Определение 1.3.1.** *Односторонней называется функция  $F : X \rightarrow Y$ , обладающая двумя свойствами:*

1. *существует полиномиальный алгоритм вычисления значений  $F(x)$ ;*
2. *не существует полиномиального алгоритма инвертирования функции  $F$  (т. е. вычисления обратной функции — решения уравнения  $F(x) = y$  относительно  $x$ ).*

Это не совсем формальное определение. Более формально свойство 2 формулируется так: любая полиномиальная вероятностная машина Тьюринга  $T$  по  $y \in Y$  может найти  $x$  из уравнения  $F(x) = y$  лишь с пренебрежимо

малой вероятностью (меньше  $\frac{1}{p(n)}$  для любого полинома  $p(n)$ , где  $n$  — длина входа), т. е.

$$P\{F(T(F(x))) = F(x)\} < \frac{1}{p(n)}.$$

Здесь вероятность берется по равномерно распределенному  $x \in X$  и случайным битам вероятностного алгоритма  $T$ . При этом рассматривается дополнительное ограничение на мощность  $X$ : считается, что она не превосходит некоторого полинома от мощности  $Y$ .

Вопрос о существовании односторонних функций пока открыт и является одним из центральных в теоретической криптографии и теории сложности. Однако есть функции, которые предположительно являются односторонними. Одна из них — *дискретный логарифм* (уже упоминавшийся в разделе ??).

Как мы видели только что, требование трудности вычисления обратной к односторонней функции формулируется с использованием сложности на случайных исходных данных (а не в худшем случае, что более привычно в теории сложности). В связи с этим значительный интерес представляют задачи, в которых из сложности в худшем случае вытекает ее сложность в среднем. Дискретный логарифм обладает этим интересным свойством: если эта функция сложна в худшем случае, то сложна и в среднем. Доказательство этого свойства простое, и мы приведем его сейчас, предварительно дав более точную формулировку. Пусть  $\mathbf{Z}_p^*$  обозначает мультипликативную группу поля  $\mathbf{Z}_p$ ,  $g$  — ее примитивный элемент.

**Теорема 1.** Пусть существует полиномиальный алгоритм  $A$ , который при случайном и равномерном выборе  $b \in \mathbf{Z}_p^*$  правильно решает задачу дискретного логарифмирования на доле  $b$  не менее  $1/n^{O(1)}$  (здесь  $n$  обозначает длину двоичной записи  $b$ ).

Тогда существует полиномиальный по  $n$  вероятностный алгоритм, который находит дискретный логарифм для всех  $b$ .

*Доказательство.* Построим новый вероятностный алгоритм  $B$ :

1. выберем  $x'$  случайно и равномерно из  $\mathbf{Z}_{p-1}$
2. вычислим  $g^{x'} \bmod p$

3. вычислим  $b' = bg^{x'} \bmod p$ .

Заметим, что величина  $g^{x'} \bmod p$  равномерно распределена в  $\mathbf{Z}_p^*$  (упражнение 1.3.1).

Тогда  $b'$  — случайный элемент, равномерно распределенный в  $\mathbf{Z}_p^*$  (упражнение 1.3.2).

А далее все просто. Применим алгоритм  $A$  к  $b'$ : при этом мы получим ответ с вероятностью не менее  $1/n^{O(1)}$ .

А по нему очень легко восстановить ответ для исходной задачи, т. е. найти дискретный логарифм  $b$ . Действительно, дискретный логарифм от  $b'$  по определению равен  $x + x'$ , т.к.  $g^x g^{x'} = g^{x+x'}$ . Но мы знаем  $x'$ , поэтому легко можем найти  $x$ .

Далее используя стандартную технику усиления (амплификации, т. е. повторяя для данного  $b$  независимо эту процедуру полиномиальное число раз), можно сделать вероятность ошибки экспоненциально малой.  $\square$

**Упражнение 1.3.1.** Выберем  $x$  случайно и равномерно из  $\mathbf{Z}_{p-1}$ . Докажите, что величина  $g^x \bmod p$  равномерно распределена в  $\mathbf{Z}_p^*$ .

**Упражнение 1.3.2.** Выберем  $x$  случайно и равномерно из  $\mathbf{Z}_{p-1}$ . Докажите, что для любого фиксированного  $b \neq 0$  величина  $b' = bg^x \bmod p$  равномерно распределена в  $\mathbf{Z}_p^*$ .

Дадим определение криптосистем с открытым ключом и посмотрим, почему для существования достаточно стойких криптосистем с открытым ключом необходимо существование односторонних функций.

**Определение 1.3.2.** Криптосистема с открытым ключом определяется тремя алгоритмами: генерации ключей  $F$ , шифрования  $E$  и дешифрования  $D$ .

Все эти алгоритмы предполагаются полиномиальными. Алгоритм генерации ключей известен всем: любой может подать ему на вход случайную строку  $r$  нужной длины и получить пару ключей  $(e, d)$ , где  $e$  — открытый, а  $d$  — секретный ключ. По условию корректности криптосистемы для любого открытого текста  $m$ , алгоритма шифрования  $E_e$  и алгоритма дешифрования  $D_d$  должно выполняться соотношение:  $D_d(E_e(m)) = m$ .

Покажем, что  $F$  должна быть односторонней функцией, иначе система не будет стойкой. Предположим, что существует полиномиальный вероятностный алгоритм  $A$ , который инвертирует  $F$  с вероятностью не менее  $1/p(n)$  для некоторого полинома  $p(n)$ , где  $n$  — длина открытого ключа  $e$ . Противник может подать на вход алгоритма  $A$  ключ  $e$  и получить с указанной вероятностью значение из прообраза  $r'$ . Далее ему остается только подать  $r'$  на вход алгоритма генерации ключей  $F$  и получить пару ключей  $(e, d')$ . По определению криптосистемы для любого открытого текста  $m$  должно выполняться  $D_{d'}(E_e(m)) = m$ . Таким образом, секретный ключ найден с вероятностью не менее  $1/p(n)$  и, используя процедуру амплификации, эту вероятность можно сделать близкой к единице, запуская алгоритм полиномиальное число раз.

## 1.4 Система RSA и ее анализ

Еще одним новым понятием криптографии является понятие *функции с секретом*.

**Определение 1.4.1.** *Функцией с секретом*  $K$  называется функция  $F_K : X \rightarrow Y$ , зависящая от параметра  $K$  и обладающая следующими свойствами:

1. при любом  $K$  существует полиномиальный алгоритм вычисления значений  $F_K(x)$ ;
2. при неизвестном  $K$  не существует полиномиального алгоритма инвертирования  $F_K$ ;
3. при известном  $K$  существует полиномиальный алгоритм инвертирования  $F_K$ .

Существование таких функций также не доказано, но для практических целей криптографии было построено несколько функций, которые могут оказаться функциями с секретом.

Для них свойство 2 пока строго не доказано, но считается, что задача инвертирования эквивалентна некоторой давно изучаемой трудной (с

алгоритмической точки зрения) математической задаче. Наиболее известной и популярной из них является теоретико-числовая функция, на которой построен шифр RSA.

Сначала приведем общую схему *криптосистемы с открытым ключом*.

1. Пользователь  $A$ , который хочет получать зашифрованные сообщения, должен выбрать какую-нибудь функцию  $F_K$  с секретом  $K$ .
2. Он публикует описание функции  $F_K$  в качестве своего алгоритма шифрования. При этом значение секрета  $K$  он никому не сообщает и держит в секрете.
3. Пользователь  $B$  посылает пользователю  $A$  защищаемую информацию  $x \in X$ , вычисляя  $y = F_K(x)$  и посылая  $y$  по открытому каналу пользователю  $A$ .
4. Поскольку  $A$  знает секрет  $K$ , то он умеет эффективно инвертировать  $F_K$ . Он вычисляет  $x$  по полученному  $y$ . Никто другой не знает  $K$  и, поэтому, в силу свойства 2 функции с секретом, не сможет за полиномиальное время по зашифрованному сообщению  $F_K(x)$  вычислить защищаемую информацию  $x$ .

Схема RSA устроена следующим образом (алгоритм 2).

Докажем сейчас однозначность декодирования.

**Теорема 2.** Для всех  $x$

$$x^{ed} \equiv x \pmod{n}.$$

*Доказательство.* Имеем

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)},$$

откуда получаем, что для некоторого  $k$

$$ed = 1 + k(p-1)(q-1).$$

---

**Алгоритм 2** Схема RSA

---

1. Выбирают два достаточно больших простых числа  $p$  и  $q$  (обычно около 100 десятичных знаков).
2. Находят  $n = pq$ .
3. Выбирают число  $e$ , взаимно-простое с  $p - 1$  и  $q - 1$ :

$$\text{нод}(e, p - 1) = \text{нод}(e, q - 1) = 1.$$

Здесь и далее  $\text{нод}(a, b)$  обозначает наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$ .

4. Вычисляют функцию Эйлера  $\varphi(n)$ , равную числу натуральных чисел, не превосходящих  $n$  и взаимно-простых с ним по формуле:

$$\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q) = (p - 1)(q - 1).$$

5. Находят целое число  $d$  такое, что

$$de \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}, \quad 1 \leq d < \varphi(n).$$

Такое число существует и единственно, поскольку  $\text{нод}(e, \varphi(n)) = 1$ .

- Функция  $F_K$ , реализующая шифрование в схеме RSA устроена следующим образом:

$$F_K : x \rightarrow x^e \pmod{n}.$$

- Дешифрование осуществляется функцией

$$G(a) = a^d \pmod{n}.$$

Секретом является число  $p$  (или  $q$ ) в разложении  $n$  на простые множители (или  $d$ ).

---



Пусть  $x \neq 0$ . Малая теорема Ферма гласит, что  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , откуда мы получаем, что

$$\begin{aligned} x^{ed} &\equiv x(x^{p-1})^{k(q-1)} \pmod{p} \\ &\equiv x(1)^{k(q-1)} \pmod{p} \\ &\equiv x \pmod{p}. \end{aligned}$$

Если же  $x = 0$ , то тривиально имеем  $x^{ed} \equiv x \pmod{p}$ .

Аналогично рассматриваем соотношения по модулю  $q$  и получаем, что для всех  $x$

$$x^{ed} \equiv x \pmod{q}.$$

Теперь остается применить китайскую теорему об остатках, которая гласит: для взаимно-простых чисел  $r_1, \dots, r_k$  любое число  $0 \leq n < r_1 \cdot \dots \cdot r_k$  однозначно восстанавливается по остаткам

$$n \equiv n_1 \pmod{r_1}, n \equiv n_2 \pmod{r_2}, \dots, n \equiv n_k \pmod{r_k}.$$

По китайской теореме об остатках имеет место соотношение:

$$x^{ed} \equiv x \pmod{pq}.$$

□

Как осуществить шаги 1-5? Шаги 2 и 4 выполняются очевидным образом.

Шаг 1 выполняется с использованием эвристики: выбираются числа из некоторой арифметической прогрессии и проверяются на простоту эффективным (полиномиальным) алгоритмом. В силу гипотезы Крамера о том, что в любом интервале от  $n$  до  $n + O(\log^2 n)$  при достаточно больших  $n$  есть простое число, число проверок на простоту можно ограничить полиномом от  $\log n$ . Шаг эвристический, поскольку гипотеза Крамера далека от того, чтобы быть доказанной, но на практике этот метод работает весьма эффективно.

Шаг 3 выполняется с использованием алгоритма Евклида.

Шаг 5 также выполняется с использованием алгоритма Евклида, точнее некоторого его обобщения. А именно, ищется решение сравнения

$$xe \equiv 1 \pmod{\varphi(n)},$$

что равносильно поиску целых решений  $(x, y)$  уравнения  $ex + y\varphi(n) = 1$ . Для последней задачи используется следующая модификация алгоритма Евклида.

Алгоритм решения уравнения  $ax + by = 1$ .

На чем основана стойкость системы RSA? Из изложенного выше видно, что единственным препятствием к нахождению секретного ключа  $d$ , позволяющего расшифровывать все сообщения, является незнание сомножителей  $p$  и  $q$ . Значит, если мы в состоянии эффективно разложить на множители  $n = pq$ , то система RSA не является стойкой. Для задачи факторизации чисел (разложения на множители) в настоящее время неизвестны эффективные (полиномиальные) алгоритмы, несмотря на то, что эта задача интенсивно исследовалась в последние 30 лет. Конечно, такой аргумент не должен нас вполне успокаивать, так как вся история науки (в частности, алгоритмическая теория чисел) показывает, что многие задачи, казавшиеся трудными, решаются затем достаточно просто. Ярким примером подобного результата является недавнее открытие полиномиального детерминированного алгоритма проверки простоты числа, который будет рассмотрен нами в дальнейшем.

Миклош Айтаи в 1996 г. доказал, что можно построить случайную решетку с коротким вектором в ней такую, что любой алгоритм нахождения этого вектора в данной случайной решетке можно конвертировать в эффективный алгоритм нахождения достаточно короткого вектора в *любой решетке*. Это по виду похоже на теорему 1 для дискретного логарифма, но там параметры  $p$  и  $g$  не были случайными, что оставляет слабости в интерпретациях сводимости от сложности «в среднем» к сложности «в худшем случае» для дискретного логарифма.

Эти результаты положили начало новому направлению в криптографии, которое на Западе получило название «Lattice based cryptography» и элементы которого мы предполагаем рассмотреть в данном курсе лекций.

В качестве подготовительного раздела мы рассматриваем основные факты из теории колец, полей и решеток, необходимые для описания криптосистем на решетках. Довольно удивительным образом оказывается, что многие из этих фактов необходимы и для доказательства корректности полиномиального алгоритма проверки простоты числа. Именно на этом до-

казательстве мы иллюстрируем ряд приложений алгебраической техники из теории колец полиномов.

В заключение данного раздела приведем пару упражнений, связанных с важными свойствами криптосистемы RSA.

**Упражнение 1.4.1.** Система RSA является мультипликативной в том смысле, что произведение кодов равно коду произведения

$$x^e y^e \pmod{n} \equiv (xy)^e \pmod{n}.$$

Используя этот факт докажите, что если противник имеет алгоритм расшифровки 1 процента сообщений случайно выбранных из  $\mathbf{Z}_n$ , то он может переработать его в вероятностный алгоритм расшифровки произвольного сообщения, закодированного кодом RSA, с большой вероятностью (аналогично теореме 1).

**Упражнение 1.4.2.** Докажите, что если противник найдет каким-либо образом секретный ключ  $d$ , то он сможет эффективно разложить число  $n$  на множители.

Этот факт означает, что нахождение секретного ключа в системе RSA на самом деле эквивалентно разложению  $n$  на множители.

## 1.5 Основные понятия теории сложности

# Глава 2

## Необходимые сведения из теории колец, полей и решеток

### 2.1 Понятие кольца. Кольца с однозначным разложением на множители.

#### 2.1.1 Кольца. Основные определения

Напомним некоторые определения.

Законом композиции называют отображение

$$M \times M \rightarrow M,$$

называемое умножением. Результат композиции называется произведением и обычно записывается как  $xy$ . Элемент  $x \in M$  называется единицей, если для всех  $y \in M$  выполняется равенство  $xy = yx = y$  и обозначается символом  $e$  (в случае аддитивной операции  $x + y$ , для которой предполагается выполнение равенства  $x + y = y + x$ , такой элемент называется нулем и обозначается через  $0$ ). Операция называется ассоциативной, если для всех  $x, y, z \in M$  выполняется равенство  $x(yz) = (xy)z$ . Операция называется коммутативной, если для всех  $x, y \in M$  выполняется равенство  $xy = yx$ .

Моноидом называется множество  $M$  с ассоциативной операцией умножения, содержащее единицу. В частности, множество  $M$  не пусто.

Пусть имеется упорядоченный набор элементов  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , тогда определено их произведение  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  (докажите это).

**Упражнение 2.1.1.** Пусть  $M$  — произвольное множество. Докажите, что определен моноид, состоящий из произведений  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  элементов множества  $M$ . Как определяется единичный элемент в этом моноиде?

**Определение 2.1.1.** Пусть  $M$  — моноид. Элемент  $b \in M$  называется **правым обратным** для  $a \in M$ , если  $ab = e$ . Элемент  $b \in M$  называется **левым обратным** для  $a \in M$ , если  $ba = e$ .

**Определение 2.1.2.** Моноид  $G$  называется **группой**, если для любого его элемента определен его правый обратный.

**Упражнение 2.1.2.** Доказать, что правый обратный элемент единственный и является также левым обратным.

**Определение 2.1.3.** **Кольцом** называется множество  $R$  с двумя законами композиции, называемыми, соответственно, сложением и умножением, такими что

1. множество  $R$  является коммутативной группой относительно сложения; нейтральный элемент обозначается через  $0$ ;
2. умножение ассоциативно<sup>1</sup>;
3. умножение и сложение связаны законами **дистрибутивности**:  $a(b+c) = ab + ac$  и  $(b+c)a = ba + ca$ .

**Определение 2.1.4.** Если в кольце (см. определение 2.1.4) имеется единичный элемент  $e$  относительно умножения, то такое кольцо называется **кольцом с единицей**.

---

<sup>1</sup>Вообще бывают и неассоциативные кольца, например кольца Ли, но в этом курсе они рассматриваться не будут.

**Упражнение 2.1.3.** Приведите пример ассоциативного кольца без единицы. т. е. кольца в смысле определения 2.1.3 «Кольцо» но не удовлетворяющего определению 2.1.4 «Кольцо с единицей».

**Определение 2.1.5.** Если в кольце (см. определение 2.1.4 «Кольцо с единицей») умножение коммутативно, то кольцо называется **коммутативным**.

Приведем примеры различных колец.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  — кольцо *целых чисел*.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  — кольцо *рациональных чисел*.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  — кольцо *вещественных чисел*.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$  — кольцо *комплексных чисел*.

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  — кольцо *вычетов по модулю  $n$* .

$\mathbb{A}[x]$  — кольцо многочленов над коммутативным кольцом  $\mathbb{A}$ .

$\mathbb{A}(x)$  — кольцо рациональных функций над кольцом  $\mathbb{A}$ .

**Упражнение 2.1.4.** Показать, что в общем случае  $\mathbb{A}[x]$  не совпадает с кольцом функций, задаваемых многочленами над кольцом  $\mathbb{A}$ . (Указание: рассмотреть кольцо  $A = \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  — простое.)

Рассмотрим еще пару нетривиальных примеров:

- Пусть  $S$  — множество,  $A$  — кольцо и  $\mathcal{M}(S, A)$  — множество отображений из  $S$  в  $A$ . Тогда  $\mathcal{M}(S, A)$  является кольцом, относительно операций, заданных формулами

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{и} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

при всех  $x \in S$ .

- Пусть  $M$  — аддитивная группа и  $\text{End}(M)$  — множество групповых гомоморфизмов  $M$  в себя. Это множество является кольцом относительно операций, заданных формулами

$$(fg)(x) = f(g(x)) \quad \text{и} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

при всех  $x \in M$ .

**Упражнение 2.1.5.** Докажите:

1.  $0x = 0$ .
2. при  $1 = 0$  кольцо  $A$  состоит из одного 0.
3.  $(-x)y = -(xy)$ .
4.  $(-x)(-y) = (xy)$ .

**Определение 2.1.6.** Подмножество  $B \subset A$  называется подкольцом кольца  $A$ , если это множество является аддитивной группой относительно сложения, замкнуто относительно умножения, а для кольца с единицей содержит единицу.

Очевидный пример подколец среди рассмотренных выше колец:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

**Упражнение 2.1.6.** Рассмотрим кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_{10}$ . Образуют ли элементы из  $\mathbb{Z}_{10}$  кратные 5, подкольцо в  $\mathbb{Z}_{10}$ ?

**Упражнение 2.1.7.** Описать все подкольца в кольце вычетов  $\mathbb{Z}_n$  по модулю  $n$ .

**Определение 2.1.7.** Если  $A$  — кольцо, то  $U(A)$  — множество всех обратимых по умножению элементов в  $A$ , т. е. имеющих одновременно правый и левый обратный элемент (по умножению), называется **группой единиц**<sup>2</sup> кольца  $A$  и обозначается через  $A^*$ .

<sup>2</sup>Иногда называют множеством обратимых элементов.



**Упражнение 2.1.8.** Докажите, что группа единиц (см. определение 2.1.7 «Группа единиц»), является группой относительно операции умножения.

Примеры групп единиц:

1.  $U(\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ .
2.  $U(\mathbb{Q}) \equiv \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .
3.  $U(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
4.  $U(C[0, 1]) = \{f \in C[0, 1] \mid f(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]\}$ .

**Определение 2.1.8.** Кольцо  $A$ , в котором  $1 \neq 0$  и всякий ненулевой элемент обратим, называется **кольцом с делением** или **телом**.

**Определение 2.1.9.** Коммутативное кольцо с делением называется **полем** (см. определения 2.1.5 «Коммутативное кольцо» и 2.1.8 «Тело»).

Примеры:

1. Полями являются кольца  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2$ .
2.  $\mathbb{Z}$  не является полем.

**Упражнение 2.1.9.** Кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_n$  является полем (полем вычетов) тогда и только тогда, когда  $n = p$ , т. е. является простым числом.

## 2.1.2 Идеалы и гомоморфизмы колец

**Определение 2.1.10.** **Левым идеалом** кольца  $A$  называется подмножество  $a$  в  $A$  являющееся аддитивной подгруппой группы  $A$ , и такое, что  $Aa \subset a$ .

Для **правого идеала** должно аналогично выполняться условие  $aA \subset a$ .

Подмножество, являющееся одновременно левым и правым идеалом называется **двусторонним идеалом** или просто **идеалом**.

Приведем примеры идеалов:

1. Для любого кольца  $A$  идеалами будут  $\{0\}$  и  $A$ .
2. Для любого  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n\mathbb{Z}$  будет идеалом для  $\mathbb{Z}$ .
3. Для любого  $a \in [0, 1]$ ,  $I_a = \{f \in C[0, 1] \mid f(a) = 0\}$  будет идеалом для  $C[0, 1]$ .

**Определение 2.1.11.** Идеал порожденный одним элементом, называют **главным** (*principal ideal*):

Пусть  $A$  кольцо и  $a \in A$ , то  $a = Aa$  — левый **главный** идеал, а элемент  $a$  называется **образующим** главного идеала  $a$ .

Аналогично  $AaA$  — **главный двусторонний идеал**.

Очевидно, что в коммутативном кольце всякий левый или правый идеал является двусторонним.

**Определение 2.1.12.** Коммутативное кольцо, в котором всякий идеал главный, называется **кольцом главных идеалов**.

**Упражнение 2.1.10.** Доказать, что кольцо целых чисел является кольцом главных идеалов.

**Определение 2.1.13.** Пусть  $a$  и  $b$  — идеалы в  $A$ .

**Произведением идеалов**  $ab$  называется множество сумм

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$

где  $x_i \in a$  и  $y_i \in b$ .

**Упражнение 2.1.11.** Проверить, что  $ab$  является идеалом и что множество идеалов образует мультипликативный моноид, причем единичным элементом в нем является само кольцо. Этот последний идеал называется единичным и обозначается через  $(1)$ . Если  $a$  и  $b$  — левые идеалы, то их произведение также является левым идеалом, и выполняется свойство ассоциативности умножения.

**Упражнение 2.1.12.** Если  $a$  и  $b$  — левые идеалы, то  $a + b$  (сумма аддитивных подгрупп — минимальная подгруппа, аддитивной группы кольца, содержащая группы  $a$  и  $b$ ) — левый идеал. Аналогично для двусторонних

идеалов. Доказать, что идеалы образуют моноид относительно сложения идеалов. Доказать свойство дистрибутивности

$$b(a_1 + \dots + a_n) = ba_1 + \dots + ba_n.$$

Аналогично для умножения с другой стороны.

Однако заметим, что это множество не является кольцом.

**Упражнение 2.1.13.** Пусть  $\{a_i\}_{i \in I}$  — семейство идеалов. Тогда их пересечение  $\bigcap_{i \in I} a_i$  — также идеал.

**Упражнение 2.1.14.** Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — элементы кольца  $A$ . Обозначим через  $(a_1, \dots, a_n)$  идеал, являющийся пересечением всех идеалов, содержащих эти элементы или левый идеал являющийся пересечением всех левых идеалов, содержащих эти элементы. Элементы  $a_1, \dots, a_n$  называются образующими этого идеала. Доказать, что этот идеал состоит из всех элементов кольца  $A$ , которые могут быть представлены в виде

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n,$$

где  $x_i \in A$ .

**Определение 2.1.14.** *Отображение  $f : A \rightarrow B$  колец называется гомоморфизмом, если выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} f(a + a') &= f(a) + f(a'), & f(aa') &= f(a)f(a'), \\ f(0) &= 0, & f(1) &= 1 \end{aligned}$$

для всех  $a, a' \in A$ .

Его **ядром** называется ядро его аддитивного гомоморфизма, т. е. множество

$$\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}.$$

**Упражнение 2.1.15.** Ядро гомоморфизма является идеалом (двусторонним).

Обратно, пусть задан идеал  $a \subset A$ . Тогда определено кольцо  $A/a$ , элементами которого являются смежные классы аддитивной группы кольца  $A$ . Умножение классов определяется формулой  $(x + a)(y + a) = xy + a$ .

**Упражнение 2.1.16.** Доказать, что определенное выше множество является кольцом. Определить гомоморфизм  $f : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$  и доказать, что  $\ker f = \mathfrak{a}$ .

**Определение 2.1.15.** Пусть  $A$  кольцо и  $B$  его подкольцо. Пусть  $S \subset A$ . Обозначим через  $B[S]$  пересечение всех подколец, содержащих  $B$  и  $S$ .

**Упражнение 2.1.17.** Пусть элементы множеств  $B$  и  $S$  коммутируют. Докажите, что  $B[S]$  состоит из элементов вида

$$\sum b_{i_1, \dots, i_n} s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n},$$

где сумма пробегает некоторое множество наборов  $(i_1, \dots, i_n)$  целых чисел  $\geq 0$ ,  $b_{i_1, \dots, i_n} \in B$ ,  $s_1 \dots s_n \in S$ .

**Определение 2.1.16.** Если  $A = B[S]$ , то говорят что  $S$  является множеством *кольцевых образующих* для  $A$  над  $B$ . Если  $S$  конечно, то говорят, что  $A$  *конечно порождено как кольцо над  $B$* .

**Упражнение 2.1.18.** Пусть  $f : B \rightarrow B'$  — гомоморфизм колец и  $A = B[S]$ . Докажите, что имеется не более одного продолжения этого гомоморфизма на кольцо  $A$ , имеющее предписанное задание на множестве  $S$ .

Пусть  $A$  — кольцо,  $\mathfrak{a}$  — идеал и  $S$  подмножество в  $A$ . Если  $S \subset \mathfrak{a}$ , будем обозначать это как

$$S \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Пусть  $x, y \in A$  и  $x - y \in \mathfrak{a}$ , будем обозначать это как

$$x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Если  $\mathfrak{a}$  — главный идеал, равный  $(a)$ , то допустима запись

$$x \equiv y \pmod{a}.$$

**Упражнение 2.1.19.** Докажите, что любой биективный гомоморфизм колец является изоморфизмом колец, а образ кольца при гомоморфизме является подкольцом.

**Упражнение 2.1.20.** Пусть  $f : A \rightarrow A'$  — гомоморфизм колец и  $a'$  — идеал в  $A'$ . Докажите, что  $f^{-1}(a')$  — идеал в  $A$  и определен инъективный гомоморфизм

$$A/a \rightarrow A/a'.$$

**Определение 2.1.17.** Пусть  $A$  — кольцо. Элементы  $x, y \in A$  называются **делителями нуля**, если  $x \neq 0, y \neq 0, a xy = 0$ .

Примеры:

- В  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  нет делителей нуля.
- В кольце пар  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , с покомпонентным умножением, все элементы вида  $(z_1, 0)$  или  $(0, z_2)$ , где  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ , будут делителями нуля  $(0, 0)$ .
- В кольце матриц  $2 \times 2$  над полем  $\mathbb{Q}$ , будет, например, делитель нуля  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ , т.к.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- В кольце  $C[0, 1]$  непрерывных  $[0, 1]$  функций с умножением-композицией, делителями нуля будут все нетождественно равные нулю функции, имеющие точки, где они равны нулю.

**Определение 2.1.18.** Кольцо  $A$  называется **целостным**, если:

- оно коммутативно;
- в нем нет делителей нуля;
- $1 \neq 0$ .

**Упражнение 2.1.21.** Кольцо целых чисел  $\mathbb{Z}$  целостное. Пусть  $m > 1$  целое. Докажите, что кольцо  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  содержит делители нуля тогда и только тогда, когда  $m$  не простое.

**Определение 2.1.19.** Факторкольцо  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  называется **кольцом целых чисел по модулю  $n$** .

### 2.1.3 Коммутативные кольца

В данном разделе далее термин кольцо будет означать коммутативное кольцо.

**Определение 2.1.20.** Идеал  $p \neq A$  кольца  $A$  называется **простым**, если из  $xy \in p$  следует, что либо  $x \in p$ , либо  $y \in p$ .

**Упражнение 2.1.22.** Докажите, что идеал  $p$  простой тогда и только тогда, когда кольцо  $A/p$  целостное (не имеет делителей нуля).

**Упражнение 2.1.23.** Пусть  $p \in \mathbb{Z}$  — простое число и  $p = (p)$  — главный идеал в  $\mathbb{Z}$ , порожденный числом  $p$ . Тогда идеал  $p$  простой. Докажите это, используя основную теорему арифметики о единственности разложения на простые сомножители в кольце целых чисел.

**Определение 2.1.21.** Идеал  $m$  называется **максимальным**, если  $m \neq A$  и не существует другого идеала  $a \neq A$ , содержащего  $m$ .

**Упражнение 2.1.24.** Всякий максимальный идеал — простой.

**Упражнение 2.1.25.** Докажите, что идеал  $m$  кольца  $A$  максимальный тогда и только тогда, когда  $A/m$  — поле.

**Пример.** Пусть  $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел. Тогда всякий его идеал  $o$  главный, т. е.  $o = n\mathbb{Z}$ . Этот идеал простой тогда и только тогда, когда  $n = p$  простое. Кольцо  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  называется **кольцом целых чисел по модулю  $n$** . Если  $n = p$  простое, то это кольцо является полем и обозначается символом  $\mathbb{F}_p$ . В частности, мультипликативная группа поля  $\mathbb{F}_p$  совпадает с группой отличных от нуля целых чисел по модулю  $p$ . Порядок группы единиц кольца  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  обозначается через  $\varphi(n)$  и определяемая функция известна как  $\varphi$ -функция Эйлера. В частности, для простых  $p$  выполняется равенство  $\varphi(p) = p - 1$ .

**Упражнение 2.1.26.** Докажите равенство  $x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  для всех целых  $x$ , взаимно простых с  $n$ .

**Теорема 3.** «Китайская теорема об остатках»

Пусть  $A$  — кольцо и  $a_1, \dots, a_n$  — такие идеалы, что  $a_i + a_j = A$  при всех  $i \neq j$ . Для любого семейства элементов  $x_1, \dots, x_n$  кольца  $A$  существует такой элемент  $x \in A$ , что  $x \equiv x_i \pmod{a_i}$  при всех  $i$ .

**Следствие.** Пусть  $A$  — кольцо и  $a_1, \dots, a_n$  — такие идеалы, что  $a_i + a_j = A$  при всех  $i \neq j$ . Пусть

$$f : A \rightarrow \prod_{i=1}^n A/a_i$$

— гомоморфизм кольца  $A$ , индуцированное проекциями  $A$  на  $A/a_i$  для каждого сомножителя. Тогда ядро гомоморфизма  $f$  есть  $\bigcap_{i=1}^n a_i$  и  $f$  сюръективно, что приводит к изоморфизму

$$A / \bigcap_{i=1}^n a_i \xrightarrow{\approx} \prod_{i=1}^n A/a_i.$$

**Упражнение 2.1.27.** Докажите китайскую теорему об остатках и ее следствие.

**Упражнение 2.1.28.** Пусть  $m = \prod_i p_i^{r_i}$  — разложение на простые сомножители числа  $m$ . Докажите, что тогда имеет место изоморфизм колец

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \approx \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z}.$$

В частности, для мультипликативной группы кольца имеется изоморфизм

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \approx \prod_i (\mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z})^*.$$

Поэтому для функции Эйлера справедливо равенство

$$\varphi(m) = \prod_i \varphi(p_i^{r_i}).$$

**Упражнение 2.1.29.** Пусть  $p$  — простое число и  $r$  — целое число  $\geq 1$ . Докажите индукцией по  $r$ , что

$$\varphi(p^r) = (p-1)p^{r-1}.$$

Пусть  $A$  кольцо и  $e$  его единичный элемент. Тогда определен гомоморфизм колец

$$\lambda : \mathbb{Z} \rightarrow A,$$

для которого  $\lambda(n) = ne$  и его ядро является главным идеалом, порожденным некоторым целым неотрицательным числом  $n$ .

Тогда определен инъективный гомоморфизм колец  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow A$ . Поэтому, если кольцо  $A$  целостное, то кольцо  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  — целостное и число  $n$  простое или  $n = 0$ . Если  $n = 0$ , то кольцо  $A$  содержит подкольцо  $\mathbb{Z}$ , обычно отождествляемое с  $\mathbb{Z}$ . В этом случае говорят, что  $A$  имеет *характеристику 0*. Если же  $n = p$  — простое, то кольцо  $A$  содержит в качестве подкольца поле  $\mathbb{F}_p$  и в этом случае говорят, что  $A$  имеет *характеристику  $p$* .

Характеристика поля  $Q$  обозначается как  $\text{char } Q$ .

В частности, каждое поле  $K$  имеет характеристику 0 или  $p > 0$ . В первом случае поле  $K$  содержит в качестве подполя поле рациональных чисел, а во втором случае изоморфный образ поля  $\mathbb{F}_p$ .

В обоих случаях это поле будет называться *простым полем* содержащимся в  $K$  и его обычно отождествляют с  $\mathbb{Q}$  или  $F_p$ .

Примеры:

- $\text{char } \mathbb{Q} = 0, \text{char } \mathbb{R} = 0$ ;
- $\text{char } \mathbb{Z}_p = p$  (для простого числа  $p$ ).

Под простым кольцом в целостном кольце  $A$  будем понимать либо кольцо целых чисел  $\mathbb{Z}$ , если  $A$  имеет характеристику 0, либо  $F_p$ , если  $A$  имеет характеристику  $p$ .

### 2.1.4 Факториальные кольца

**Определение 9.** Элемент  $a \neq 0$  кольца  $A$  называется *неприводимым*, если он не является единицей и если из равенства  $a = bc$ , где  $b, c \in A$ , следует, что  $b$  или  $c$  — единица кольца  $A$ . Неприводимые элементы, отличающиеся умножением на единицу будем называть эквивалентными.

**Задача 20.** Пусть  $a \neq 0$  — некоторый элемент в  $A$ , и пусть главный идеал  $(a)$  простой. Тогда элемент  $a$  неприводимый.

**Определение 10.** Нормой в кольце  $A$  называется мультипликативная функция  $N : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ , равная нулю только на нулевом элементе кольца.



**Пример.** Приведем контрпример к обратному утверждению предыдущей задачи. Полагаем

$$A = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5) \approx \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}.$$

Докажем, что элемент  $3 \in A$  неприводим. Для этого введем норму в кольце  $A$  формулой  $N(x + y\sqrt{-5}) = x^2 + 5y^2$ . Тогда  $N(3) = 9$ . Если элемент  $3 \in A$  не является неприводимым, то существуют  $a$  и  $b$ , такие что  $N(a) \neq 1$ ,  $N(b) \neq 1$  и  $ab = 3$ . Тогда  $9 = N(3) = N(ab) = N(a)N(b)$ . Следовательно,  $N(a) = 3$ . Но это невозможно ввиду определения нормы. Имеем далее

$$A/(3) = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5, 3) = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 5) = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 - 1).$$

Тогда в кольце  $A/(3)$  выполняется равенство  $(X - 1)(X + 1) = 0$ , причем  $X - 1 \neq 0$  и  $X + 1 \neq 0$  в кольце  $A/(3)$ . Поэтому кольцо  $A/(3)$  не целостное, т. е. идеал  $(3)$  не является простым.

**Определение 11.** Кольцо называется *факториальным* (или кольцом с однозначным разложением на множители), если оно целостное и всякий ненулевой элемент кольца имеет единственное разложение на неприводимые элементы. Единственность понимается с точностью до перестановок сомножителей и замен неприводимых множителей эквивалентными.

**Определение 12.** Пусть  $A$  — целостное кольцо и  $a, b \in A, ab \neq 0$ . Будем говорить, что  $a$  *делит*  $b$ , и записывать это формулой  $a|b$ , если существует элемент  $c \in A$ , для которого  $ac = b$ . Элемент  $d \in A, d \neq 0$ , называется *наибольшим общим делителем* (сокращенно НОД) элементов  $a$  и  $b$ , если  $d|a, d|b$  и если любой элемент  $e \in A, e \neq 0$ , делящий  $a$  и  $b$ , делит также  $d$ .

**Предложение 1.** Пусть  $A$  — целостное кольцо главных идеалов и  $a, b \in A, a, b \neq 0$ . Если  $(a, b) = (c)$ , то  $c$  — наибольший общий делитель элементов  $a$  и  $b$ .

**Задача 21.** Доказать предложение 1.

**Теорема 1.** Всякое целостное кольцо  $A$  главных идеалов факториально.

**Доказательство.** Докажем вначале, что всякий ненулевой элемент имеет разложение на неприводимые множители. Обозначим через  $S$  множество ненулевых главных идеалов, образующие которых не имеют разложения на неприводимые множители. Пусть  $S \neq \emptyset$ . Пусть  $(a_1) \in S$ .

Рассмотрим произвольную возрастающую цепочку

$$(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \dots \subsetneq (a_n) \subsetneq \dots$$

идеалов из  $S$ . Докажем, что эта цепочка конечна. Действительно, объединение идеалов этой цепочки является идеалом в  $A$ , а согласно условию теоремы этот идеал главный, скажем равен  $(a)$ . Тогда  $a$  лежит в некотором идеале  $(a_n)$  и

$$(a_n) \subset (a) \subset (a_n).$$

Следовательно,  $(a) = (a_n)$ , и цепочка обрывается на члене  $(a_n)$ . Поэтому, любой идеал в  $A$ , содержащий идеал  $(a_n)$ , имеет образующую, допускающую разложение на неприводимые множители.

Заметим теперь, что элемент  $a_n$  приводимый, иначе он имел бы разложение на неприводимые множители. Следовательно,  $a_n = bc$ , где ни  $b$ , ни  $c$  не являются единицами. Тогда  $(a_n) \subsetneq (b)$  и  $(a_n) \subsetneq (c)$ , и, следовательно,  $b$  и  $c$  имеют разложения на неприводимые сомножители. Тогда произведение этих разложений дает разложение  $a_n$  на неприводимые множители, вопреки тому, что  $S$  не пусто.

Докажем единственность. Вначале докажем, что если  $p$  — неприводимый элемент в  $A$ ,  $a, b \in A$ ,  $p|ab$ , то  $p|a$  или  $p|b$ . Действительно, если  $p \nmid a$ , то НОД элементов  $p$  и  $a$  равен 1 и, следовательно, по предыдущему предложению

$$1 = xp + ya$$

для некоторых  $x, y \in A$ . Тогда  $b = bxp + yab$ , а поскольку  $p|ab$ , то из этого равенства получаем, что  $p|b$ .

Предположим, что некоторый элемент  $a$  имеет два разложения

$$a = p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s.$$

Тогда  $p_1$  делит произведение, стоящее справа. Следовательно, по доказанному выше  $p_1$  делит один из его сомножителей, причем после их перестановки можно считать, что это  $q_1$ . Тогда  $q_1 = p_1 u_1$ , где  $u_1$  единица. Сокращая на  $p_1$  получаем

$$p_2 \dots p_r = u_1 q_2 \dots q_s.$$

Повторяя процедуру  $r - 1$  раз завершаем доказательство единственности разложения.

Если  $A$  факториальное кольцо, то всякий неприводимый элемент  $p$  порождает простой идеал  $(p)$ . Поэтому в факториальном кольце неприводимые элементы будем называть *простыми*.

Используя разложение на простые сомножители, легко находить значения наибольших общих делителей пар элементов кольца. Элементы  $a, b \in A$  называются *взаимно простыми* если  $(a, b) = (1)$ .

### 2.1.5 Кольца многочленов

**Определение 13.** Пусть  $A$  — кольцо. Кольцом многочленов  $A[X]$  над кольцом  $A$  называется множество конечных сумм вида

$$p(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i,$$

где только конечное число элементов  $a_n \in A$  не равно нулю. Сложение и умножение определяются формулами

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i \\ \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \right) X^i \end{aligned}$$

Степень ненулевого многочлена  $p(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$  называется число  $n$ , такое, что  $a_n \neq 0$  и  $a_m = 0$  при  $m > n$  и обозначается  $\deg p(X)$ . Полагаем  $\deg 0 = -\infty$ . Тривиально проверяется, что

$$\begin{aligned} \deg(fg) &= \deg f + \deg g \\ \deg(f + g) &\leq (\deg f, \deg g). \end{aligned}$$

Выполняя деление «столбиком» получаем

**Предложение 2.** В кольце многочленов над полем определено деление с остатком. А именно, для любых многочленов  $f, g \in K[X]$  существуют многочлены  $q, r \in K[X]$ , такие что  $\deg r < \min\{\deg f, \deg g\}$  и

$$f(X) = q(X)g(X) + r(X).$$

В кольце многочленов над произвольным кольцом определено деление с остатком на многочлен со старшим коэффициентом равным единице.

**Следствие.** Если  $f(a) = 0$  для некоторого  $a \in A$ , то существует такой многочлен  $g(X)$ , для которого выполняется равенство  $f(X) = (X - a)g(X)$ .

**Доказательство.** В силу предыдущего предложения имеем  $f(X) = (X - a)g(X) + r(x)$ . Поскольку степень многочлена  $X - a$  равна единице, то степень остатка  $r$  не меньше единицы. Следовательно, остаток является элементом кольца  $A$ . Тогда выполняется равенство  $f(a) = (a - a)g(a) + b$  и, следовательно,  $b = 0$ , т. е.  $f(X) = (X - a)g(X)$ .

При этом степень многочлена  $g(X)$  на единицу меньше степени многочлена  $f(X)$ .

**Теорема 2.** Кольцо многочленов над полем является кольцом главных идеалов.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный идеал  $\mathfrak{a} \neq 0$  в кольце  $K[X]$  над полем  $K$ . Пусть  $g(X)$  — ненулевой многочлен минимальной степени в этом идеале. Пусть  $f(X) \in \mathfrak{a}$ . Разделим многочлен  $f$  на многочлен  $g$  с остатком. Получим  $f(X) = q(X)g(X) + r(X)$ , причем степень многочлена  $r(X)$  меньше степени многочлена  $g(X)$ . Поскольку  $\mathfrak{a}$  — идеал, элемент  $r \in \mathfrak{a}$ , а поскольку его степень меньше степени многочлена  $g(X)$ , то этот многочлен равен нулю. Следовательно,  $f(X) \in (g(X))$ , т. е.  $(g(X)) = \mathfrak{a}$ . Следовательно, все идеалы кольца  $K[X]$  главные.

**Следствие.** Кольцо многочленов над полем факториально.

### 2.1.6 Однозначность разложения на простые множители в кольце многочленов

Для доказательства однозначности разложения на простые множители в кольце многочленов нам потребуются некоторые новые понятия.

**Конструкция Гротендика.** Пусть  $A$  — кольцо без делителей нуля. Рассмотрим отношение  $\sim$  на множестве пар  $(a, b) \in A \times A^*$ , заданное правилом

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Легко проверить, что  $\sim$  является отношением эквивалентности на множестве таких пар. Определим операции сложения и умножения на таких парах

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd), \quad (a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

Из определения следует, что при замене пар эквивалентными, результаты операций остаются эквивалентными. Следовательно, определены операции на множестве классов эквивалентности  $A \times A^* / \sim$  и это множество является полем. Полученное поле называется полем частных кольца  $A$ . Пара  $(a, b) \in A \times A^*$  называется дробью,  $a \in A$  — числителем, а элемент  $b \in A^*$  — знаменателем этой дроби может быть записана также в виде  $\frac{a}{b}$ . Имеется инъективный гомоморфизм колец  $i : A \rightarrow K$ , заданный формулой  $i(a) = (a, 1)$ .

**Задача 22.** Доказать, что в факториальном кольце каждый элемент его кольца частных  $K$  может быть представлен в виде  $(a, b)$ , где  $\text{НОД}(a, b) = 1$  и такое представление единственно с точностью до умножения числителя и знаменателя на единицу кольца  $A$ . Такое представление называется несократимым.

**Определение 14.** Пусть  $A$  факториальное кольцо и  $K$  — его поле частных. Пусть  $a \in K$ ,  $a \neq 0$  и  $p$  — простой элемент кольца  $A$ . Тогда существует такое целое число  $r$ , что

$$a = p^r b,$$

где  $b \in K$  и  $p$  не делит ни числитель, ни знаменатель несократимого представления для  $b$ . Это число  $r$  называется *порядком* элемента  $a$  в  $p$  и обозначается через  $r = \text{ord}_p a$ . Порядок элемента  $a = 0$  в  $p$  полагаем равным  $+\infty$ .

Если  $a, a' \in K$  и  $aa' \neq 0$ , то

$$\text{ord}_p(aa') = \text{ord}_p(a) + \text{ord}_p(a').$$

**Определение 15.** Пусть  $f(X) \in K[X]$  — многочлен одной переменной

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n.$$

Для  $f = 0$  полагаем  $\text{ord}_p f = +\infty$ . Если  $f \neq 0$ , то считаем по определению

$$\text{ord}_p f = \min \text{ord}_p a_i,$$

где минимум берется по тем  $i$ , для которых  $a_i \neq 0$ .

Элемент  $up^{\text{ord}_p f}$ , где  $u$  — единица в  $A$ , называется  $p$ -содержанием многочлена  $f$ . Содержанием  $f$  будем называть выражение

$$\prod p^{\text{ord}_p f},$$

заданное с точностью до умножения на единицу и будем обозначать через  $\text{cont}(f)$ .

Если  $b \in K$ ,  $b \neq 0$ , то  $\text{cont}(bf) = b \text{cont}(f)$ . Следовательно,

$$f(X) = cf_1(X),$$

где  $c = \text{cont}(f)$  и  $f_1(X)$  имеет содержание 1. В частности, все коэффициенты многочлена  $f_1$  лежат в  $A$  и их НОД равен 1.

**Лемма Гаусса.** Пусть  $A$  — факториальное кольцо,  $K$  — его поле частных,  $f, g \in K[X]$  — многочлены от одной переменной. Тогда

$$\text{cont}(fg) = \text{cont}(f)\text{cont}(g).$$

**Доказательство.** Достаточно доказать, что если  $f, g \in K[X]$  имеют содержание 1, то и их произведение имеет содержание 1. Для этого достаточно проверить, что для каждого простого  $p$  выполняется равенство  $\text{ord}_p(fg) = 1$ . Пусть

$$\begin{aligned} f(X) &= a_n X^n + \dots + a_0, & a_n &\neq 0 \\ g(X) &= b_n X^n + \dots + b_0, & b_n &\neq 0. \end{aligned}$$

Пусть  $r$  — наибольшее целое число, такое, что  $0 \leq r \leq n$  и  $p \nmid a_r$ . Пусть  $s$  — наибольшее целое число, такое, что  $0 \leq s \leq n$  и  $p \nmid a_s$ . Такие  $r, s$  определены, поскольку  $\text{ord}_p(f) = \text{ord}_p(g) = 1$ . Коэффициент при  $X^{r+s}$  в произведении  $f(X)g(X)$  равен

$$c = a_0 b_{r+s} + \dots + a_r b_s + \dots + a_{r+s} b_0.$$

Все слагаемые, кроме  $a_r b_s$ , делятся на  $p$ , а  $p \nmid a_r b_s$ . Поэтому  $p \nmid c$ . Следовательно,  $\text{ord}_p(fg) = 1$ .

**Следствие.** Пусть  $f(X) \in A[X]$  имеет в  $K[X]$  разложение  $f(X) = g(X)h(X)$ . Если  $c_g = \text{cont}(g)$ ,  $c_h = \text{cont}(h)$  и  $g = c_g g_1$ ,  $h = c_h h_1$ , то

$$f(X) = c_g c_h g_1(X) h_1(X)$$

и  $c_g c_h$  — элемент из  $A$ .

В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Оно следует из соотношения

$$\text{cont}(f) = c_g c_h \text{cont}(g_1 h_1) = c_g c_h.$$

**Теорема 3.** Пусть  $A$  факториальное кольцо. Тогда кольцо многочленов  $A[X]$  факториально. Его простыми элементами являются либо простые элементы из кольца  $A$ , либо многочлены из  $A[X]$ , неприводимые в  $K[X]$  и имеющие содержание 1.

**Доказательство.** Пусть  $A$  — факториальное кольцо и  $K$  его поле частных. Пусть  $f \in A[X] \subset K[X]$ . Тогда существует разложение этого многочлена на простые сомножители в кольце  $K[X]$

$$f(X) = c \cdot p_1(X) \dots p_r(X),$$

где  $c \in A$  и  $p_1(X) \dots p_r$  — многочлены из  $A[X]$ , неприводимые в  $K[X]$ . Выделив их содержания, можно без ограничений общности, считать, что содержание  $p_i$  равно 1 для каждого  $i$ . Тогда  $c = \text{cont}(f)$ . Поэтому существование разложения на множители доказано. Единственность разложения следует из единственности разложения в кольце  $K[X]$  и предыдущего следствия.

**Следствие 1.** Многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  различных корней.

**Следствие 2.** Пусть  $A$  — факториальное кольцо. Тогда кольцо многочленов от  $n$  переменных  $A[X_1, \dots, X_n]$  факториально. Его единицами являются в точности единицы из  $A$ , а простыми элементами — либо простые элементы из  $A$ , либо многочлены, которые неприводимы в  $K[X]$  и имеют содержание 1.

**Теорема 4.** Пусть  $k$  — поле. Всякая конечная мультипликативная подгруппа  $U$  в  $k$  циклическая.

**Доказательство.** Представим группу  $U$  как произведение подгрупп  $U(p)$  по всем простым  $p$ , где  $U(p)$  — группы порядка степени  $p$ . Достаточно доказать, что  $U(p)$  циклическая для каждого  $p$ . Пусть  $a$  — элемент из  $U(p)$  максимального периода  $p^k$ . Тогда  $x^{p^k} = 1$  для всех  $x \in U(p)$ . Поэтому все элементы из  $U(p)$  являются корнями многочлена

$$X^{p^k} - 1.$$

Циклическая группа, порожденная  $a$ , содержит  $p^k$  элементов. Если эта группа не совпадает с  $U(p)$ , то многочлен имеет более чем  $p^k$  различных корней, что противоречит полученному выше следствию.

### 2.1.7 Кратные корни

**Определение.** Дифференцированием в кольце многочленов  $A[X]$  называется отображение

$$D : A[X] \rightarrow A[X],$$

определяемое формулой

$$D(a_n X^n + \dots + a_0) = n a_n X^{n-1} + \dots + a_1.$$

Используется также обозначение  $D(f(X)) = f'(X)$ .

**Теорема 5.** Выполняются соотношения

1.  $(f + g)' = f' + g'$ ,
2.  $(fg)' = f'g + fg'$ ,
3. Если  $a \in A$ , то  $(af)' = af'$ ,
4.  $((x - a)^m)' = m(x - a)^{m-1}$  при  $m \geq 1$ .

**Определение 16.** Пусть  $K$  — поле,  $f \in K[X]$  и  $a$  — его корень в  $K$ . Тогда

$$f(X) = (X - a)^m g(X),$$



где  $g(X)$  — многочлен, взаимно простой с  $X - a$ . Число  $m$  называется кратностью корня  $a$  в  $f$ . Если  $m > 1$ , то  $a$  называется *кратным корнем*.

**Теорема 6.** Пусть  $f \in K[X]$ , где  $K$  — поле. Элемент  $a \in K$  является кратным корнем многочлена  $f$  тогда и только тогда, когда  $f'(a) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $a \in K$  является кратным корнем многочлена  $f$ . Тогда  $f(X) = (X - a)^m g(X)$  при некотором  $m > 1$ . Тогда

$$f'(X) = m(X - a)^{m-1}g(X) + (X - a)^m g'(X)$$

и

$$f'(a) = m(a - a)^{m-1}g(a) + (a - a)^m g'(a) = 0.$$

Пусть теперь  $f'(a) = 0$ . Тогда  $f(X) = (X - a)^m g(X)$ , где  $g(a) \neq 0$  и  $m > 0$ . Тогда

$$0 = f'(a) = m(a - a)^{m-1}g(a) + (a - a)^m g'(X) = m(a - a)^{m-1}g(a).$$

Следовательно,

$$0 = m(a - a)^{m-1}g(a),$$

что возможно только при  $m > 1$ .

## 2.2 Поля

### 2.2.1 Расширения полей

Пусть  $F$  — поле. Если  $F$  — подполе поля  $E$ , то поле  $E$  будем называть *расширением* поля  $F$ . Можно рассматривать  $E$  как векторное пространство над  $F$ . В зависимости от размерности этого векторного пространства будем называть расширение  $E$  над  $F$  *конечным* или *бесконечным*.

Элемент  $\alpha \in E$  поля расширения называется *алгебраическим* над  $F$ , если существуют  $a_0, \dots, a_n \in F$   $n \geq 1$ , не все равные 0 и такие, что

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0.$$

Для алгебраического элемента  $\alpha \neq 0$  всегда можно считать, что  $a_0 \neq 0$  (иначе сократим на подходящую степень  $\alpha$ ). Это условие эквивалентно тому, что гомоморфизм полей

$$F[X] \rightarrow E,$$

тождественный на  $F$  и преобразующий  $X$  в  $\alpha$ , имеет ненулевое ядро. Поскольку кольцо многочленов над полем является кольцом главных идеалов, это ядро будет порождено некоторым многочленом  $p(X) \in F[X]$  со старшим коэффициентом, равным единице. Тогда имеет место изоморфизм

$$F[X]/(p(X)) \approx F[\alpha],$$

а поскольку кольцо  $F[\alpha]$  — целостное (как подкольцо поля), то многочлен  $p(X)$  неприводим. Будем обозначать такой многочлен через  $\text{Irr}(\alpha, F, X)$ .

Расширение  $E$  поля  $F$  называется *алгебраическим*, если всякий элемент из  $E$  алгебраичен над  $F$ .

**Предложение 1.** Всякое конечное расширение  $E$  поля  $F$  алгебраично над  $F$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \in E$ ,  $\alpha \neq 0$ . Степени

$$1, \alpha, \dots, \alpha^n$$

не могут быть линейно независимыми над  $F$  для всех целых  $n$ , поскольку размерность  $E$  над  $F$  конечна. Линейное соотношение между степенями показывает алгебраичность элемента  $\alpha$  над  $F$ .

Обратное утверждение неверно. Пример бесконечномерного алгебраического расширения — множество всех алгебраических чисел над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ .

Если  $E$  — расширение поля  $F$ , то размерностью этого расширения называется

$$[E : F] = \dim_F(E).$$

**Предложение 2.** Пусть  $F \subset E$  — расширения поля  $k$ . Тогда

$$[E : k] = [E : F][F : k].$$

Если  $\{x_i\}_{i \in I}$  — базис поля  $F$  над  $k$  и  $\{y_j\}_{j \in J}$  — базис поля  $E$  над  $F$ , то  $\{x_i y_j\}_{(i,j) \in I \times J}$  — базис поля  $E$  над  $k$ .

**Следствие.** Расширение  $E \supset F \supset k$  конечно над  $k$  тогда и только тогда, когда  $E$  конечно над  $F$  и  $F$  конечно над  $k$ .

**Задача 1.** Докажите предложение 2 и выведите следствие. Указание: докажите линейную независимость предложенного варианта базиса.

Башней полей называется последовательность расширений

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n.$$

Башня *конечна*, тогда и только тогда, когда каждый ее этаж конечен.

Пусть  $k$  — поле,  $E$  — его расширение и  $\alpha \in E$ . Обозначим через  $k(\alpha)$  наименьшее подполе в  $E$ , содержащее  $k$  и  $\alpha$ . Оно изоморфно полю частных кольца  $k[\alpha]$  и состоит из всех дробей вида  $f(\alpha)/g(\alpha)$ , где  $g(\alpha) \neq 0$ .

**Предложение 3.** Пусть элемент  $\alpha$  алгебраичен над  $k$ . Тогда  $k(\alpha) = k[\alpha]$  и поле  $k(\alpha)$  конечно над  $k$ . Выполняется равенство  $[k(\alpha) : k] = \deg \text{Irr}(\alpha, F, X)$ .

**Задача 2.** Доказать предложение 3. Указание: воспользуйтесь утверждением о возможности представления наибольшего общего делителя двух элементов евклидова кольца как их линейной комбинации.

**Определение 1.** Пусть  $E, F$  — расширения поля  $k$ . Если  $E$  и  $F$  содержатся в некотором поле  $L$ . Наименьшее подполе в  $L$ , содержащее  $E$  и  $F$ , называется *комполитом* полей  $E$  и  $F$  в  $L$  и обозначается через  $EF$ . Отметим, что композит полей определен лишь в случае задания вложений полей в общее поле.

Пусть  $k$  — подполе в  $E$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — элементы из  $E$ . Обозначим через  $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — наименьшее подполе в  $E$ , содержащее  $k$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Его элементами являются дроби

$$\frac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)},$$

где  $f, g$  — многочлены с коэффициентами из  $k$ . Заметим, что  $E$  можно представить как объединение всех подполей  $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  по всем конечным подсемействам элементов из  $E$ . Поле  $E$  называется *конечно порожденным* над  $k$ , если существует конечное семейство  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  элементов из  $E$ , такое, что

$$E = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Непосредственно из определений следует

**Предложение 4.** Всякое конечное расширение  $E$  поля  $k$  конечно порождено.

**Предложение 5.** Пусть  $E = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — конечно порожденное расширение поля  $k$ , причем все  $\alpha_i$  алгебраичны над  $k$ . Тогда  $E$  — конечное алгебраическое расширение поля  $k$ .

**Указание:** Для доказательства рассмотрите башню полей

$$k \subset k(\alpha_1) \subset k(\alpha_1, \alpha_2) \subset \dots \subset k(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

**Предложение 6.** Для алгебраических расширений выполняются свойства:

1. Пусть  $k \subset F \subset E$  — башня полей. Расширение  $k \subset E$  алгебраическое тогда и только тогда, когда расширения  $k \subset F$  и  $F \subset E$  алгебраические.
2. Если  $k \subset F$  алгебраическое расширение и  $k \subset E$  произвольное расширение, причем  $E$  и  $F$  лежат в общем поле, то  $F \subset FE$  — алгебраическое расширение.
3. Если  $k \subset F$  и  $k \subset E$  — алгебраические расширения, причем  $E$  и  $F$  лежат в общем поле, то  $k \subset FE$  — алгебраическое расширение.

**Доказательство.** Пусть  $k \subset F \subset E$  — башня полей. Пусть  $E$  алгебраично над  $k$ . Тогда непосредственно из определения следует алгебраичность расширений  $k \subset F$  и  $F \subset E$ . Обратно, пусть расширения  $k \subset F$  и  $F \subset E$  алгебраичны. Пусть  $\alpha \in E$ . Тогда при некоторых  $a_0, \dots, a_n \in F$  и  $a_n \neq 0$  выполняется соотношение

$$a_n \alpha^n + \dots + a_0 = 0.$$

Пусть  $F_0 = k(a_n, \dots, a_0)$ . Тогда в силу предложения 5 расширение  $F_0$  конечно над  $k$  и  $\alpha$  алгебраичен над  $F_0$ . Рассматривая башню

$$k \subset F_0 = k(a_n, \dots, a_0) \subset F_0(\alpha),$$

каждый этаж которой конечен, заключаем, что расширение  $F_0(\alpha)$  конечно над  $k$  и, следовательно, элемент  $\alpha$  алгебраичен над  $k$ .

Утверждение 2 предложения 6 вытекает из того, что композит  $FE$  можно представить как объединение полей  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , по всем конечным семействам  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  элементов поля  $E$ , являющихся алгебраическими элементами над полем  $k$  и, следовательно, алгебраическими элементами над полем  $F$ .

Последнее утверждение является следствием двух первых. Для этого достаточно рассмотреть башню

$$k \subset F \subset EF.$$

## 2.2.2 Алгебраическое замыкание

**Задача 3.** Гомоморфизм полей всегда является вложением.

Пусть  $E$  и  $F$  — расширения поля  $k$ . Вложение полей  $\sigma : F \rightarrow E$  называется гомоморфизмом над полем  $k$ , если ограничение  $\sigma : k \rightarrow E$  является тождественным отображением  $\sigma : k \rightarrow k \subset E$ . Гомоморфизм поля в себя называется автоморфизмом, если этот гомоморфизм является изоморфизмом.

**Лемма 1.** Пусть  $E$  — алгебраическое расширение поля  $k$ , и  $\sigma : E \rightarrow E$  вложение поля в себя над полем  $k$ . Тогда  $\sigma$  — автоморфизм.

**Доказательство.** Достаточно доказать его сюръективность. Пусть  $\alpha \in E$  и  $p(X)$  — его неприводимый многочлен над  $k$ . Обозначим через  $E'$  подполе в  $E$ , порожденное всеми корнями многочлена  $p(X)$ , лежащими в  $E$ . Тогда  $E'$  — конечно порождено над  $k$  и, следовательно, является конечным расширением над  $k$ . Кроме того, каждый корень многочлена  $p(X)$ , лежащий в поле  $E$  при вложении  $\sigma$  преобразуется также в корень того же многочлена и, следовательно, определяет вложение  $E'$  в себя. Поскольку  $\sigma : E' \rightarrow E'$  является также гомоморфизмом конечномерных векторных пространств над  $k$ , то этот гомоморфизм является изоморфизмом. Следовательно, элемент  $\alpha$  лежит в образе гомоморфизма  $\sigma$ .

**Лемма 2.** Пусть  $E_1, E_2$  — расширения поля  $k$ , содержащиеся в некотором большем поле  $E$ , и пусть  $\sigma : E \rightarrow L$  — вложение полей. Тогда  $\sigma(E_1 E_2) = \sigma(E_1) \sigma(E_2)$ .

Эта лемма вытекает из предыдущей.

**Предложение 6.** Пусть  $k$  — поле и  $f$  — многочлен из  $k[X]$  степени  $\geq 1$ . Существует расширение  $E$  поля  $k$ , в котором  $f$  имеет корень.

**Следствие.** Пусть  $k$  — поле и  $f_1, \dots, f_n \in k[X]$  — многочлены степеней  $\geq 1$ . Существует расширение  $E$  поля  $k$ , в котором каждый  $f_i$  имеет корень.

**Задача 4.** Доказать предложение 6 и его следствие.

**Определение 2.** Поле  $L$  называется алгебраически замкнутым, если всякий многочлен из  $L[X]$  степени  $\geq 1$  имеет в  $L$  корень.

**Теорема 1.** Для всякого поля  $k$  существует алгебраически замкнутое поле  $L$ , содержащее поле  $k$  в качестве подполя.

**Доказательство.** Построим расширение  $k \subset E_1$ , в котором всякий многочлен из  $k[X]$  степени  $\geq 1$  имеет корень. Каждому многочлену  $f \in k[X]$

степени  $\geq 1$  сопоставим символ  $X_f$ . Пусть  $S$  — множество таких символов  $X_f$ . Рассмотрим кольцо многочленов  $k[S]$  и его идеал, порожденный многочленами  $f(X_f)$ . Покажем, что этот идеал не совпадает с единичным. Если это не так, то при некоторых  $g_i \in k[S]$

$$g_1 f_1(X_{f_1}) + \dots + g_n f_n(X_{f_n}) = 1$$

Многочлены  $g_1, \dots, g_n$  зависят только от конечного числа переменных, скажем  $X_{f_1}, \dots, X_{f_N}$ . Тогда соотношение можно представить как

$$\sum_{i=1}^n g_i(X_{f_1}, \dots, X_{f_N}) f_i(X_{f_i}) = 1.$$

Пусть теперь  $F$  — конечное расширение, в котором каждый многочлен  $f_1, \dots, f_n$  имеет корень, скажем  $\alpha_i$  корень многочлена  $f_i$  в  $F$ . Положим  $\alpha_i = 0$  при  $i > n$ . Подставив  $\alpha_i$  вместо  $X_i$  в полученное соотношение, получим равенство  $0 = 1$ . Следовательно, предположение о том, что идеал единичный неверно.

Пусть теперь  $\mathfrak{m}$  — максимальный идеал, содержащий идеал, порожденный всеми многочленами  $f(X_f)$ . Тогда  $k[S]/\mathfrak{m}$  — поле и имеется каноническое отображение

$$\sigma : k[S] \rightarrow k[S]/\mathfrak{m}.$$

Тогда многочлен  $f \in k[X]$  степени  $\geq 1$  имеет в расширении  $k \subset k[S]/\mathfrak{m}$  корень, равный  $X_f$ .

По индукции можно построить такую последовательность полей

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots \subset E_n \subset \dots,$$

что каждый многочлен из  $E_n[X]$  степени  $\geq 1$  имеет корень в  $E_{n+1}$ . Обозначим через  $E$  объединение всех таких полей. Тогда  $E$  — алгебраически замкнутое поле. (Докажите это.)

**Следствие 1.** Для всякого поля  $k$  существует расширение  $\bar{k}$ , алгебраическое над  $k$  и алгебраически замкнутое.

**Доказательство.** Пусть  $E$  — алгебраически замкнутое расширение поля  $k$ , и пусть  $\bar{k}$  — объединение всех подрасширений из  $E$ , алгебраических над  $k$ . Тогда  $\bar{k}$  алгебраично над  $k$ . (Докажите.)

**Следствие 2.** Пусть  $L$  алгебраически замкнутое поле и  $f \in L[X]$ . Тогда существуют  $c \in L$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , такие, что

$$f(X) = c(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n).$$

Коэффициент  $c \in L$  совпадает со старшим коэффициентом многочлена  $f \in L[X]$ . В частности, если коэффициенты многочлена  $f$  лежат в подполе  $k$  поля  $L$ , то  $c \in k$ .

**Предложение 7.** Пусть  $\sigma : k \rightarrow L$  — вложение поля  $k$  в алгебраически замкнутое поле  $L$ . Пусть  $\alpha \in L$  — алгебраический элемент,  $E = k(\alpha)$  и  $p(X) = \text{Irr}(\alpha, k, X)$ . Число всевозможных продолжений вложения  $\sigma$  на  $k(\alpha)$  равно числу различных корней многочлена  $p$ .

**Задача 5.** Докажите предложение 7.

**Теорема 2.** Пусть  $k$  — поле,  $E$  — его алгебраическое расширение и  $\sigma : k \rightarrow L$  — вложение  $k$  в алгебраически замкнутое поле  $L$ . Тогда существует продолжение  $\sigma$  до вложения  $E$  в  $L$ . Если  $E$  алгебраически замкнуто и  $L$  алгебраично над  $\sigma k$ , то любое такое продолжение  $\sigma$  будет изоморфизмом поля  $E$  на  $L$ .

Доказательство теоремы основывается на лемме Цорна, о существовании максимального элемента в индуктивно упорядоченном множестве.

**Следствие.** Пусть  $k$  — поле и  $E, E'$  — алгебраические расширения над  $k$ . Пусть  $E, E'$  алгебраически замкнуты. Тогда существует изоморфизм

$$\tau : E \rightarrow E'$$

поля  $E$  на  $E'$ , индуцирующий тождественное отображение на  $k$ .

Следовательно, алгебраически замкнутое алгебраическое расширение определено однозначно с точностью до изоморфизма. Всякое такое расширение будет называться *алгебраическим замыканием* поля  $k$  и обозначаться через  $\bar{k}$ .

**Предложение 8.** Пусть  $k$  — бесконечное поле. Тогда любое алгебраическое расширение над  $k$  имеет ту же мощность, что и  $k$ .

Доказательство следует из оценки мощности расширения  $E_1$  в конструкции доказательства теоремы 1 и построения алгебраического расширения как объединения счетного семейства таких множеств, а также конструкции из следствия для алгебраического замыкания.

**Примеры.**

1. Поле  $\mathbb{C}$  является алгебраически замкнутым. Это следует, например, из основной теоремы алгебры.
2. Подполе поля  $\mathbb{C}$ , состоящее из всех чисел, алгебраических над  $\mathbb{Q}$ , есть алгебраическое замыкание  $\overline{\mathbb{Q}}$  поля  $\mathbb{Q}$ . В частности, из предыдущего предложения следует, что  $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$ .

Пусть задан многочлен  $f \in k[X]$  степени  $\geq 1$ . Поле *разложения*  $K$  многочлена  $f$  называется такое расширение  $K$  поля  $k$ , в котором многочлен  $f$  разлагается на линейные множители

$$f(X) = c(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n),$$

где  $\alpha_i \in K$  и  $K = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Из теоремы единственности разложения на простые сомножители в кольце многочленов следует единственность поля разложения с точностью до изоморфизма.

### 2.2.3 Конечные поля

Пусть  $F$  — конечное поле из  $q$  элементов. Имеется гомоморфизм колец

$$\mathbb{Z} \rightarrow F,$$

преобразующий 1 в 1, ядром которого не может быть 0, и, следовательно, является главным идеалом, порожденным простым числом  $p$ , поскольку  $F$  не имеет делителей 0. Следовательно,  $F$  имеет характеристику  $p$  и содержит поле, изоморфное  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ .

Заметим, что единственным автоморфизмом поля  $\mathbb{F}$  является тождественный. Поэтому можно отождествить поле  $\mathbb{F}$  с соответствующим подполем поля  $F$ . Тогда  $F$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$ , причем в силу конечности поля его размерность конечна. Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_n$  — базис для  $F$  над  $\mathbb{F}$ . Тогда всякий элемент из  $F$  однозначно представляется в виде

$$a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n,$$

где  $a_i \in \mathbb{F}$ . Следовательно,  $q = p^n$ .



Мультипликативная группа  $F^*$  имеет порядок  $q - 1$ . Поэтому элементы  $\alpha \in F^*$  являются корнями уравнения  $X^{q-1} - 1 = 0$ . Следовательно, для всех элементов из  $F$  выполняется соотношение

$$X^q - X = 0.$$

Следовательно, многочлен  $X^q - X$  имеет  $q$  различных корней в  $F$  и, следовательно, разлагается в  $F$  на линейные множители

$$X^q - X = \prod_{\alpha \in F} (X - \alpha).$$

Поэтому  $F$  — поле разложения для многочлена  $X^q - X$ . Но как было доказано выше, поле разложения определено однозначно с точностью до изоморфизма. Следовательно, если конечное поле из  $q$  элементов существует, то  $q = p^n$  и совпадает с полем разложения многочлена  $X^{p^n} - X$  над  $\mathbb{F}$ .

Докажем, что поле разложения многочлена  $X^{p^n} - X$  над  $\mathbb{F}$  совпадает с множеством корней многочлена  $X^{p^n} - X$  в замыкании  $\overline{\mathbb{F}}$ . Действительно, пусть  $\alpha, \beta$  — корни. Тогда

$$(\alpha + \beta)^{p^n} - (\alpha + \beta) = \alpha^{p^n} + \beta^{p^n} - \alpha - \beta = 0,$$

откуда  $\alpha + \beta$  — корень. Далее

$$(\alpha\beta)^{p^n} - \alpha\beta = \alpha^{p^n} \beta^{p^n} - \alpha\beta = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$$

и, следовательно,  $\alpha\beta$  — корень. Отметим, что 0 и 1 также корни уравнения  $X^{p^n} - X$ . Если  $\beta \neq 0$ , то

$$(\beta^{-1})^{p^n} - \beta^{-1} = (\beta^{p^n})^{-1} - \beta^{-1} = 0,$$

следовательно,  $\beta^{-1}$  — корень. Наконец,

$$(-\beta)^{p^n} - (-\beta) = (-1)^{p^n} \beta^{p^n} + \beta.$$

При нечетном  $p$  выполняется равенство  $(-1)^{p^n} = -1$  и, следовательно,  $-\beta$  — корень. Если  $p = 2$ , то  $-\beta = \beta$  — корень. Утверждение о корнях доказано.

Производная многочлена  $X^{p^n} - X$  равна

$$(X^{p^n} - X)' = p^n X^{p^n-1} - 1 = -1.$$

Следовательно, все корни многочлена  $X^{p^n} - X$  различные и, следовательно, он имеет  $p^n$  различных корней. Следовательно, его поле разложения содержит ровно  $p^n$  различных элементов. Итак, доказана

**Теорема 3.** Для всякого простого числа  $p$  и всякого целого числа  $n \geq 1$  существует поле порядка  $p^n$ , обозначаемое символом  $\mathbb{F}_{p^n}$ , однозначно определенное как подполе в алгебраическом замыкании  $\overline{\mathbb{F}}$ . Это поле разложения многочлена

$$X^{p^n} - X,$$

и его элементы — корни этого многочлена. Всякое конечное поле изоморфно одному и только одному из подполей  $\mathbb{F}_{p^n}$ .

**Следствие.** Пусть  $\mathbb{F}_q$ , где  $q = p^n$ , — конечное поле и  $m \geq 1$  — целое число. В фиксированном алгебраическом замыкании  $\overline{\mathbb{F}}_q$  существует одно и только одно расширение степени  $m$ , и этим расширением является поле  $\mathbb{F}_{q^m}$ .

**Задача 6.** Выведите следствие.

Пусть  $q = p^n$  и  $\mathbb{F}_q$  — конечное поле из  $q$  элементов. Рассмотрим отображение Фробениуса

$$\varphi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q,$$

заданное формулой  $\varphi(x) = x^p$ . Это отображение является гомоморфизмом и его ядро равно 0, поскольку  $\mathbb{F}_q$  — поле. Следовательно, этот гомоморфизм инъективен, а ввиду конечности поля является изоморфизмом. Заметим, что этот изоморфизм оставляет неподвижным поле  $\mathbb{F}_q$ .

**Теорема 4.** Группа автоморфизмов поля  $\mathbb{F}_q$  является циклической группой порядка  $n$  с образующей  $\varphi$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  — группа, порожденная элементом  $\varphi$ . Выполняется равенство  $\varphi^n = \text{id}$ , поскольку  $\varphi^n(x) = x^{p^n} = x$  для всех  $x \in \mathbb{F}_q$ . Пусть  $d$  — период  $\varphi$ . Имеем  $\varphi^d(x) = x^{p^d}$  для всех  $x \in \mathbb{F}_q$ . Следовательно, всякий элемент  $x \in \mathbb{F}_q$  является корнем уравнения

$$X^{p^d} - X = 0.$$

Это уравнение имеет не более  $p^d$  корней. Следовательно,  $d \geq n$ , откуда  $d = n$ .

Согласно предложению 7 число автоморфизмов не превосходит  $n$ . Следовательно,  $\mathbb{F}_q$  не может иметь других автоморфизмов, кроме тех, что содержатся в  $G$ .

### 2.2.4 Корни из единицы

Пусть  $k$  — поле. Элемент  $\zeta \in k$  называется *корнем из единицы* в  $k$ , если для некоторого  $n \geq 1$  выполняется соотношение  $\zeta^n = 1$ . Заметим, что если характеристика поля равна  $p$ , то уравнение

$$X^{p^m} = 1$$

имеет только один корень, равный 1.

Пусть целое число  $n > 1$  взаимно просто с характеристикой поля  $k$ . Тогда многочлен

$$X^n - 1$$

не имеет кратных корней, поскольку его производная  $nX^{n-1}$  обращается в нуль только при  $X = 0$ . Следовательно, в алгебраическом замыкании поля  $k$ , в поле  $\bar{k}$ , многочлен  $X^n - 1$  имеет  $n$  различных корней, являющихся корнями из единицы. Они образуют группу, а эта группа, как было доказано выше, является циклической. Образующие этой группы называются *примитивными*, или *первообразными*, корнями  $n$ -й степени из единицы.

Обозначим через  $U_n$  группу всех корней  $n$ -й степени из единицы в  $\bar{k}$ . Пусть  $m, n$  взаимно простые числа, тогда

$$U_{mn} \approx U_n \times U_m.$$

Докажем, что пересечение групп  $U(n)$  и  $U(m)$  состоит только из 1. Пусть это не так и пересечение содержит  $x \neq 1$ . Из взаимной простоты элементов  $m$  и  $n$  следует, что при некоторых целых  $a, b$  выполняется равенство  $1 = am + bn$ . Тогда

$$x = x^{am+bn} = 1.$$

Следовательно,  $U_m \times U_n = U_m U_n = U_{mn}$ .

**Теорема 5.** Для всякого примитивного корня  $n$ -й степени из единицы  $\zeta$

$$[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n).$$

**Доказательство.** Пусть  $f(X)$  — неприводимый многочлен элемента  $\zeta$  над  $\mathbb{Q}$ . Тогда  $f(X)$  делит многочлен  $X^n - 1$ , поэтому  $X^n - 1 = f(X)h(X)$ , где  $f, g$  имеют старший коэффициент 1. Тогда по лемме Гаусса эти многочлены целочисленные.

Пусть  $p$  простое, не делящее  $n$ . Докажем, что  $\zeta^p$  корень многочлена  $f(X)$ . Если это не так, то  $\zeta^p$  корень многочлена  $h(X)$  и, следовательно,  $\zeta$  — корень многочлена  $h(X^p)$ . Поэтому многочлены  $f(X)$  и  $h(X^p)$  имеют нетривиальный общий делитель, а поскольку многочлен  $f(X)$  — неприводимый, то

$$h(X^p) = f(X)g(X),$$

причем (доказывается как и выше) многочлен  $g(X)$  целочисленный. Тогда из равенства

$$h(X^p) \equiv h(X)^p \pmod{p}$$

следует, что

$$h(X)^p \equiv f(X)g(X) \pmod{p}.$$

Следовательно, в кольце  $\mathbb{F}_p[X]$  многочлены  $f(X)$  и  $h(X)$  имеют нетривиальный общий множитель и в этом кольце выполняется равенство  $X^n - 1 = f(X)g(X)$  и, следовательно, многочлен  $X^n - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$  имеет кратные корни. Но это невозможно. Действительно, производная этого многочлена равна  $nX^{n-1}$  и, следовательно, не обращается в нуль в корнях из единицы, поскольку  $n$  и  $p$  взаимно простые. Следовательно,  $\zeta^p$  корень многочлена  $f(X)$ .

Поскольку  $\zeta^p$  — тоже примитивный корень  $n$ -й степени из единицы и любой примитивный корень можно получить последовательным возведением  $\zeta$  в простые степени с показателями, не делящими  $n$  (поскольку группа корней из единицы циклическая), то все примитивные корни из единицы являются корнями многочлена  $f$ , который поэтому имеет степень  $\geq \varphi(n)$ .

Докажем, что степень  $f$  не превосходит  $\varphi(n)$ . Если это не так, существует такое  $s$ , имеющее нетривиальный общий множитель с  $n$ , такое, что  $\zeta^s$

корень многочлена  $f$ . Тогда соответствие  $\zeta \mapsto \zeta^s$  определяет автоморфизм полей

$$\mathbb{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta).$$

Пусть  $q \geq 0$  наименьшее целое, такое, что  $qs \equiv 0 \pmod{n}$ . Тогда  $q < n$  и

$$\zeta^q \rightarrow \zeta^{sq} = \zeta^{nl} = 1.$$

Следовательно,  $\zeta^q = 1$ , что противоречит примитивности корня  $\zeta$ . Поэтому  $\deg f(X) \leq n$ . Учитывая доказанное неравенство  $\deg f(X) \geq n$ , получаем равенство  $\deg f(X) = n$ . Теорема доказана.

Пусть  $\zeta_n$  обозначает произвольный примитивный корень степени  $n$  из единицы.

**Следствие.** Если  $n, m \in \mathbb{N}$  — взаимно простые числа, то

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}.$$

**Доказательство.** Заметим, что  $\zeta_n$  и  $\zeta_m$  лежат в поле  $\mathbb{Q}(\zeta_{nm})$ , поскольку  $\zeta_{nm}^n$  — примитивный корень  $m$ -й степени из единицы, а  $\zeta_m \zeta_n$  — примитивный корень степени  $mn$  из единицы. Следовательно,

$$\mathbb{Q}(\zeta_n)\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_m \zeta_n).$$

Теперь утверждение следствия вытекает из мультипликативности функции Эйлера  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ .

Исследуем разложение на множители многочлена  $X^n - 1$ . Пусть характеристика поля равна 0. Имеем

$$X^n - 1 = \prod_{\omega} (X - \omega),$$

где произведение берется по всем корням  $n$ -й степени из единицы. Сгруппируем члены, соответствующие корням из единицы, имеющим одинаковый период. Пусть

$$f_d(X) = \prod_{\text{период } \omega=d} (X - \omega).$$

Тогда

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} f_d(X).$$

Из доказанной выше теоремы следует, что  $f_d(X) = \text{Irr}(\zeta_d, \mathbb{Q}, X)$ . Этот многочлен можно вычислить также с помощью рекуррентной формулы

$$f_n(X) = \frac{X^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d < n}} f_d(X)}$$

и очевидного равенства  $f_1(X) = X - 1$ .

Многочлен  $f_n(X)$  называется  $n$ -м *круговым (cyclotomic) многочленом*, или *многочленом деления круга* на  $n$  частей.

Все сказанное выше относится также к разложению многочленов  $X^n - 1$  для степеней  $n$ , взаимно простым с характеристикой поля. В частности при  $p$  и  $n$  взаимно простых, определены  $n$ -круговые многочлены над  $\mathbb{F}_p$ .

Пусть  $f_n(X) = \prod h(X)$  — разложение  $n$ -го кругового многочлена на неприводимые множители в алгебраическом замыкании  $\overline{\mathbb{F}_p}$  поля  $\mathbb{F}_p$ . Положим  $k = o_p(r)$  — порядок элемента  $p$  в группе единиц  $\mathbb{Z}_r^*$  кольца  $\mathbb{Z}_r$ . Докажем, что  $\deg h = k$ . Пусть  $\deg h = s$ . Поскольку многочлен  $h$  неприводим, определено конечное расширение степени  $s$ , поля  $\mathbb{F}_p$ , являющееся конечным полем из  $p^s$  элементов. Согласно теореме 4 группа автоморфизмов этого поля состоит из  $s$  элементов, являющимися автоморфизмами Фробениуса. Пусть  $\zeta$  — корень многочлена  $h$ . Этот корень, согласно определению многочлена  $h$ , имеет период  $r$ , т. е.  $\zeta^r = 1$  и  $\zeta^t \neq 1$  при  $1 < t < r$ . Пусть  $p^s \equiv t \pmod{r}$  и  $0 < t < r$ . Тогда по теореме 4  $\zeta^{p^s} = \zeta$ . Следовательно,  $\zeta^t = \zeta^{p^s} = \zeta$ . Следовательно,  $t = 1$ . Поэтому  $k = s$ .

## 2.3 Основные понятия теории решеток. Критерий полноты решетки. Лемма Минковского

### 2.3.1 Введение в решетки

Вначале напомним некоторые результаты из теории групп.

**Определение 2.3.1.** Элементы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  аддитивной абелевой группы  $M$  называются *системой образующих группы*, рассматриваемой как  $\mathbb{Z}$ -модуль, если любой элемент  $\alpha \in M$  можно представить в виде  $\alpha =$

$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$ , где  $c_i \in \mathbb{Z}$ . Система образующих называется базисом, если такое представление единственно.

**Определение 2.3.2.** Элемент  $a$  аддитивной абелевой группы  $M$  называется элементом конечного порядка, если  $ca = 0$  при некотором  $c \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 4.** Если абелева группа без элементов конечного порядка имеет конечную систему образующих, то она имеет и базис. Число элементов базиса является инвариантом группы.

*Доказательство.* Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — произвольная система образующих. Заметим, что при замене одной образующей на новую, полученную добавлением к ней другой, умноженной на произвольное целое число, снова получится система образующих. Действительно, пусть  $\alpha'_1 = \alpha_1 + k\alpha_2$ . Тогда для любого  $\alpha \in M$  имеем

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = c_1\alpha'_1 + (c_2 - kc_1)\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n.$$

Если элементы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  линейно независимы, то они образуют базис  $M$ . Допустим теперь, что они линейно зависимы, т. е. выполняется соотношение

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$$

при некоторых одновременно не равных нулю целых  $c_1, \dots, c_n$ . Выберем среди ненулевых элементов коэффициент  $c_i$  с наименьшим абсолютным значением. Без ограничения общности можно считать, что это  $c_1$ . Пусть не все коэффициенты  $c_i$  делятся на  $c_1$ , например,  $c_2 = c_1q + c'$ , где  $0 < c' < |c_1|$ . Перейдем к новой системе образующих  $\alpha'_1 = \alpha_1 + q\alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Тогда будет выполняться соотношение

$$c_1\alpha'_1 + c'\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0,$$

причем  $0 < c' < |c_1|$ . Продолжим данную процедуру до тех пор пока через конечное число шагов (не более  $|c_1|$ ) не получим соотношение

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n = 0$$

с целыми коэффициентами  $k_i$ , в котором один из коэффициентов, например,  $k_1$  является делителем остальных. Сократив последнее выражение на  $k_1$ , получим

$$\beta_1 + l_2\beta_2 + \dots + l_n\beta_n = 0$$

с целыми  $l_2, \dots, l_n$ . Следовательно,  $\beta_2, \dots, \beta_n$  — система образующих группы  $M$ , состоящая из  $(n - 1)$ -го элемента. Теперь можем применить описанную здесь процедуру к новой системе образующих. В результате получим либо базис, либо новую систему образующих с меньшим количеством элементов. Повторив эту процедуру конечное число раз, получим базис группы.

Напомним, что  $M \otimes \mathbb{Q} = M \times \mathbb{Q} / \sim$ , где отношение  $\sim$  задается формулой

$$(k\alpha, r) \sim (\alpha, kr),$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Инвариантность числа элементов базиса следует из инвариантности размерности векторного пространства  $M \otimes \mathbb{Q}$ .  $\square$

Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_m$  и  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$  — два базиса  $\mathbb{Z}$ -модуля  $M$ , не имеющего элементов конечного порядка. Тогда матрицы перехода одного базиса в другой целочисленные. Поскольку произведения таких матриц равны единице, их определители равны  $\pm 1$ . Следовательно, преобразования базисов задаются унимодулярными матрицами порядка  $m$ .

**Теорема 5.** *В абелевой группе  $M$  без элементов конечного порядка и с конечной системой образующих всякая подгруппа  $N$  также имеет конечное число образующих и, следовательно, имеет базис. При этом для любого базиса  $\omega_1, \dots, \omega_m$  группы  $M$  для  $N$  существует базис вида*

$$\begin{aligned} \eta_1 &= c_{11}\omega'_1 + c_{12}\omega'_2 + \dots + c_{1k}\omega'_k + \dots + c_{1m}\omega'_m \\ \eta_2 &= \phantom{c_{11}\omega'_1 +} c_{22}\omega'_2 + \dots + c_{2k}\omega'_k + \dots + c_{2m}\omega'_m \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \eta_k &= \phantom{c_{11}\omega'_1 +} \phantom{c_{12}\omega'_2 +} \dots + c_{k1}\omega'_k + \dots + c_{km}\omega'_m \end{aligned},$$

где базис  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$  отличается от базиса  $\omega_1, \dots, \omega_m$  только перестановкой элементов.



**Определение 2.3.3.** Пусть  $\mathbb{R}^n$  — евклидово пространство размерности  $n$ , рассматриваемое как группа относительно сложения векторов. Решеткой в  $\mathbb{R}^n$  называется его подгруппа

$$\Lambda = L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{b}_i \mid x_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

порожденная системой линейно независимых над  $\mathbb{R}$  векторов  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^n$ . Целые числа  $n$  и  $m$  называются, соответственно, размерностью и рангом решетки  $\Lambda$ . Если  $m = n$ , то решетка называется полной, в противном случае — неполной. Набор векторов-столбцов  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  называется базисом решетки  $\Lambda$  и может быть представлен в виде  $n \times m$ -матрицы

$$B = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m].$$

**Определение 2.3.4.** Решетка  $\Lambda = L(B)$  называется целочисленной, если матрица  $B$  целочисленная.

**Замечание.** В силу теорем 13 и 14 число  $m$  из определения 3 задается решеткой однозначно и называется рангом решетки  $\Lambda$ . Следовательно, ранг решетки равен рангу матрицы, строками которой являются координаты линейно независимых образующих решетки, или же ранг матрицы, строками которой являются попарные скалярные произведения таких образующих векторов.

В векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  определены скалярное произведение и норма.

**Определение 2.3.5.** Подгруппа  $G$  группы  $\mathbb{R}^n$  называется дискретной, если в шаре  $U(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  радиуса  $r$  имеется только конечное число элементов группы  $G$ .

**Лемма 1.** Пусть имеются два набора линейно независимых векторов  $B$  и  $B'$ , задающие одну и ту же решетку размерности  $n$ . Тогда ранги матриц  $B$  и  $B'$  равны и существует единственная унимодулярная  $m \times m$  матрица  $A$ , такая что  $BA = B'$ .

**Задача.** Доказать лемму 17.

Скалярное произведение в векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  определяет норму  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ .

**Определение 2.3.6.** Подгруппа  $G$  группы  $\mathbb{R}^n$  называется дискретной, если в шаре  $U(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  при некотором  $r > 0$  имеется только конечное число элементов группы  $G$ .

**Лемма 2.** Решетка является дискретной группой.

*Доказательство.* Выберем базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  в решетке  $\Lambda = L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ . Дополним этот набор линейно независимых векторов в  $\mathbb{R}^n$  до базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ , содержащего решетку. Выберем ненулевой элемент  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , ортогональный векторам  $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ . Положим  $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{x}, \mathbf{b}_1)}$ . Заметим, что согласно определению элемента  $x$  знаменатель не равен нулю и  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{b}_j) = \delta_{1j}$ . Аналогично определяются элементы  $\mathbf{f}_i$ , причем выполняются равенства  $(\mathbf{f}_i, \mathbf{b}_j) = \delta_{ij}$ .

Пусть элемент решетки  $\mathbf{z}$  имеет длину меньше  $r$ . Выразим его через базис

$$\mathbf{z} = a_1 \mathbf{b}_1 + \dots + a_n \mathbf{b}_n$$

где  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ , причем  $a_k = (\mathbf{z}, \mathbf{f}_k)$  по определению векторов  $\mathbf{f}_k$ . Тогда согласно неравенству Коши

$$|a_k| = |(\mathbf{z}, \mathbf{f}_k)| \leq \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{f}_k\| < r \|\mathbf{f}_k\|.$$

Следовательно, ввиду целочисленности коэффициентов  $a_k$ , в шаре радиуса  $r$  лежит конечное число элементов решетки.  $\square$

**Определение 2.3.7.** Пусть  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — базис решетки. Основным параллелепипедом решетки  $L(B)$  называется множество

$$T = \{Bc \mid 0 \leq c_i < 1\}.$$

Объем основного параллелепипеда называется детерминантом решетки и обозначается  $\det(L(B))$ .

**Лемма 3.** Детерминант решетки не зависит от базиса.

*Доказательство.* Дополним базис решетки до базиса векторного пространства  $\mathbb{R}^n$  взаимно ортогональными векторами единичной длины  $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ , ортогональными подпространству, порожденному векторами  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ . Тогда объем основного параллелепипеда на базисе  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  равен объему основного параллелепипеда на базисе  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Пусть  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  — другой базис решетки. Тогда его можно дополнить теми же векторами  $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$  до базиса в  $\mathbb{R}^n$ . Преобразование базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  в базис  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  продолжается до унимодулярного преобразования базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  в базис  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ .

Объем основного параллелепипеда равен абсолютной величине определителя, строками которого являются координаты базисных векторов,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поскольку по лемме 17 базисы связаны унимодулярными преобразованиями, соответствующие объемы равны.  $\square$

**Лемма 4.** Если  $T$  — основной параллелепипед полной решетки  $\Lambda$ , то имеет место разбиение

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\mathbf{z} \in \Lambda} \mathbf{z} + T$$

на непересекающиеся подмножества, т.е.  $\mathbf{z} + T \cap \mathbf{w} + T = \emptyset$  при  $\mathbf{z} \neq \mathbf{w} \in \Lambda$ .

**Упражнение.** Доказать лемму 20.

**Лемма 5.** Пусть  $M$  — решетка. Для любого  $r > 0$  множество  $N = \{\mathbf{z} \in M \mid \mathbf{z} + T \cap U(r) \neq \emptyset\}$  конечно.

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — базис решетки  $M$ . Положим

$$d = \|\mathbf{b}_1\| + \dots + \|\mathbf{b}_n\|.$$

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{t} \in U(r)$ , где  $\mathbf{z} \in M$  и  $\mathbf{t} \in T$ . Тогда

$$\|\mathbf{t}\| = \|\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n\| \leq \alpha_1 \|\mathbf{b}_1\| + \dots + \alpha_n \|\mathbf{b}_n\| < d$$

и

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{t}\| < r + d,$$

т. е. множество  $N$  лежит в шаре радиуса  $r + d$  и, следовательно, согласно лемме 18 конечно.  $\square$

**Лемма 6.** Подгруппа  $M \subset \mathbb{R}^n$ , множество элементов которой дискретно, является решеткой.

*Доказательство.* Пусть  $L \subset \mathbb{R}^n$  — минимальное линейное пространство, содержащее группу  $M$ . Выберем в  $L$  базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  из элементов группы  $M$  и построим решетку  $M_0$  с этим базисом. Тогда  $M_0$  — подгруппа в  $M$ . Покажем, что индекс этой группы конечен. Для этого достаточно проверить, что факторгруппа  $M/M_0$  состоит из конечного числа элементов. Согласно лемме 20 элементы факторгруппы однозначно представляются элементами группы  $M$ , находящимися в основном параллелепипеде решетки  $M_0$ , содержащемся в шаре конечного радиуса. Поскольку группа  $M$  дискретна, число таких элементов конечно. Следовательно доказано, что группа  $M$  конечно порождена и, поэтому является решеткой.  $\square$

Из лемм 18 и 22 вытекает

**Следствие 1.** Подгруппа  $M \subset \mathbb{R}^n$  является решеткой тогда и только тогда, когда она дискретна.

**Лемма 7.** Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  базис решетки  $M$ . Тогда ее детерминант равен квадратному корню из определителя

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_m) \end{vmatrix}.$$

*Доказательство.* Детерминант решетки, согласно определению, равен абсолютной величине определителя матрицы

$$D = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ , а  $\mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n$  — его ортогональное продолжение. Поэтому, он равен квадратному корню из квадрата определителя матрицы  $D$  и, следовательно, равен квадратному корню из определителя матрицы  $DD'$ , где  $'$  — операция транспонирования. Имеем

$$\begin{aligned}
 DD' &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_m) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_m) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_m) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

### 2.3.2 Критерий полноты решетки. Теорема Минковского

**Теорема 6.** Решетка  $\Lambda$  в линейном пространстве  $\mathbb{R}^n$  полна тогда и только тогда, когда в  $\mathbb{R}^n$  существует ограниченное множество  $U$ , сдвиги которого на векторы из  $\Lambda$  заполняют все пространство  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Если решетка  $\Lambda$  полная, то в качестве  $U$  можно взять любой ее основной параллелепипед (лемма 20).

Пусть теперь решетка  $\Lambda$  неполная, и пусть  $U$  — произвольное ограниченное подмножество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существует такое  $r > 0$ , что  $\|\mathbf{x}\| < r$  для

любого  $\mathbf{x} \in U$ . Пусть  $L_0 \subset \mathbb{R}^n$  — подпространство, порожденное решеткой  $\Lambda$ . Поскольку решетка неполная, то  $L_0$  — собственное подпространство и, следовательно, существует вектор  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , имеющий длину больше  $r$  и ортогональный подпространству  $L_0$ . Покажем, что  $\mathbf{y}$  не покрывается сдвигами множества  $U$ . Пусть это не так, тогда при некоторых  $\mathbf{u} \in U, \mathbf{z} \in \Lambda$  выполняется равенство  $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{z}$ . Тогда согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{u}) \leq \|\mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{u}\| < r\|\mathbf{y}\|,$$

откуда  $\|\mathbf{y}\| < r$ . □

**Теорема 7. (лемма Минковского о выпуклом теле).** Пусть в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^n$  заданы полная решетка  $M$ , объем основного параллелепипеда которой равен  $\Delta$ , и ограниченное центрально симметричное выпуклое множество  $X$  с объемом  $v(X)$ . Если  $v(X) > 2^n \Delta$ , то множество  $X$  содержит по крайней мере одну отличную от нуля точку решетки  $M$ .

*Доказательство.* Докажем вначале, что если множество  $Y \subset \mathbb{R}^n$  таково, что все его сдвиги  $Y_{\mathbf{z}} = Y + \mathbf{z}$  на векторы  $\mathbf{z}$  из решетки  $M$  не пересекаются, то  $v(Y) \leq \Delta$ . Рассмотрим основной параллелепипед  $T$  решетки  $M$  и рассмотрим пересечения  $Y \cap T_{-\mathbf{z}}$ . Тогда по лемме 20

$$v(Y) = \sum_{\mathbf{z} \in M} v(Y \cap T_{-\mathbf{z}}),$$

причем по лемме 21 в этой сумме только конечное число слагаемых не равно нулю. Сдвиг множества  $Y \cap T_{-\mathbf{z}}$  на вектор  $\mathbf{z}$  равен  $Y_{\mathbf{z}} \cap T$ , поэтому  $v(Y \cap T_{-\mathbf{z}}) = v(Y_{\mathbf{z}} \cap T)$ . Следовательно,

$$v(Y) = \sum_{\mathbf{z} \in M} v(Y_{\mathbf{z}} \cap T).$$

Поскольку все  $Y_{\mathbf{z}}$  попарно не пересекаются, то сумма правой части не больше  $v(T)$ . Следовательно,  $v(X) \leq v(T) = \Delta$ .

Рассмотрим теперь множество  $\frac{1}{2}X$ , получающееся из  $X$  преобразованием сжатия с коэффициентом  $1/2$ . Тогда из условия теоремы следует, что

$v\left(\frac{1}{2}X\right) = \frac{1}{2^n}v(X) > \Delta$ . Если все сдвиги множества  $\frac{1}{2}X$  на элементы решетки попарно не пересекаются, то по доказанному выше должно выполняться неравенство  $v\left(\frac{1}{2}X\right) \leq \Delta$ , что противоречит условию теоремы.

Следовательно, существуют  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in M$ , для которых множества  $\frac{1}{2}X + \mathbf{z}_1$  и  $\frac{1}{2}X + \mathbf{z}_2$  имеют непустое пересечение. Поэтому

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}' + \mathbf{z}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{x}'' + \mathbf{z}_2, \quad \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X.$$

Тогда

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{x}'' - \frac{1}{2}\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\mathbf{x}'' + \frac{1}{2}(-\mathbf{x}').$$

Поскольку множество  $X$  центрально симметрично и выпукло, то разность  $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 \in M$  лежит также и в  $X$ .  $\square$

**Теорема 8. (Неравенство Адамара).** Пусть  $\det(\Lambda)$  детерминант решетки и  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — ее базис. Справедливо неравенство

$$\det(\Lambda) \leq \|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма, т. е.  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — базис решетки. Рассмотрим процедуру ортогонализации базиса:

$$\mathbf{b}_1^* = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2^* = \mathbf{b}_2 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^*)} \mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^* = \mathbf{b}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_k^*)}{(\mathbf{b}_k^*, \mathbf{b}_k^*)} \mathbf{b}_k^*.$$

Выполняются неравенства  $\|\mathbf{b}_k^*\| \leq \|\mathbf{b}_k\|$ . Тогда

$$\det(\Lambda) = \|\mathbf{b}_1^*\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n^*\| \leq \|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\|.$$

$\square$

Из доказательства следует, что неравенство Адамара достигается в том и только в том случае, когда  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — ортогональны. Однако не всякая решетка имеет ортогональный базис. Классическая теорема Эрмита (1850 г.) утверждает, что для каждого  $n$  существует такое число  $c(n)$ , что в любой  $n$ -мерной решетке  $\Lambda$  можно выбрать базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , для которого

$$\|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\| \leq c(n) \cdot \det(\Lambda).$$

Эрмит показал, что можно положить  $c(n) = (4/3)^{n(n-1)/4}$ . Минковский улучшил эту оценку до  $c(n) = 2^n/V_n \sim (2n/e\pi)^{n/2}$ , где  $V_n$  — объем единичного  $n$ -мерного шара. Однако для всех этих оценок неизвестны полиномиальные алгоритмы отыскания соответствующих базисов. Ловас предложил полиномиальный алгоритм отыскания базиса с константой  $c(n) = 2^{n(n-1)/4}$ , получивший название метода приведения базиса.

**Определение 2.3.8.** Пусть  $B_m(0, r)$  — открытый шар радиуса  $r$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $\Lambda$  — решетка. Определим последовательность минимумов  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  формулой

$$\lambda_i(\Lambda) = \inf\{r \mid \dim(\text{span}(\Lambda \cap B_m(0, r))) \geq i\}.$$

**Теорема 9. (Вторая теорема Минковского).** Существуют независимые векторы решетки, для которых выполняется неравенство

$$\|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\| \leq \frac{2^n}{V_n} \cdot \det(\Lambda).$$

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  — линейно независимые векторы решетки, для которых достигаются минимальные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и предположим, что  $\prod_{i=1}^n \lambda_i > \frac{2^n}{V_n} \cdot \det(\Lambda)$ . Пусть векторы  $\mathbf{x}_i^*$  получены с помощью процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта. Рассмотрим преобразование

$$T \left( \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i^* \right) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \mathbf{x}_i^* \right).$$

Пусть  $S = B_m(0, 1) \cap \text{span}(\Lambda)$  —  $n$ -мерный шар в  $\text{span}(\Lambda)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{vol}(T(S)) &= \left( \prod_i \lambda_i \right) \text{vol}(S) \\ &> \frac{2^n}{V_n} \cdot \det(\Lambda) \text{vol}(S) \\ &= 2^n \text{vol}(\Lambda). \end{aligned}$$



Следовательно, по теореме Минковского 16 в  $T(S)$  имеется ненулевая точка решетки  $\mathbf{y}$ . Следовательно, существует точка  $\mathbf{x} \in S$ , для которой  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Из определения  $S$  следует, что  $\|\mathbf{x}\| < 1$ . Выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i^* \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \mathbf{x}_i^*.\end{aligned}$$

Поскольку  $\mathbf{y} \neq 0$  при некотором  $i$  выполняется неравенство  $c_i \neq 0$ . Пусть  $k$  — максимальное значение индекса, при котором  $c_k \neq 0$  и  $k'$  — минимальное значение индекса, при котором  $\lambda_{k'} = \lambda_k$ . Отметим, что элемент  $\mathbf{y}$  линейно независим от  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k'}$ , поскольку  $(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}) = \lambda_k c_k \|\mathbf{x}_k^*\|^2 \neq 0$  и элемент  $\mathbf{x}_k^*$  ортогонален  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k'}$ . Покажем теперь, что  $\|\mathbf{y}\| < \lambda_k$ . Действительно,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}\|^2 &= \left\| \sum_{i \leq k} \lambda_i c_i \mathbf{x}_i^* \right\|^2 \\ &= \sum_{i \leq k} \lambda_i^2 c_i^2 \|\mathbf{x}_i^*\|^2 \\ &\leq \sum_{i \leq k} \lambda_k^2 c_i^2 \|\mathbf{x}_i^*\|^2 \\ &= \lambda_k^2 \left\| \sum_{i \leq k} c_i \mathbf{x}_i^* \right\|^2 \\ &= \lambda_k^2 \|\mathbf{x}\|^2 < \lambda_k^2.\end{aligned}$$

Полученное неравенство противоречит определению  $k'$ -го последовательного минимума  $\lambda_{k'}$ .  $\square$

**Следствие 2.** Для первого минимума  $\lambda_1$  выполняется неравенство

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} \cdot \sqrt[n]{\det(\Lambda)}.$$

Из неравенства  $\frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} < \sqrt{n}$  получаем

**Следствие 3.** Для первого минимума  $\lambda_1$  выполняется неравенство

$$\lambda_1 \leq \sqrt{n} \sqrt[n]{\det(\Lambda)}.$$

## 2.4 Некоторые задачи на решетках

Определение 3.2.8 последовательных минимумов очевидным образом продолжается на произвольные нормы в  $\mathbb{R}^n$ . Тем не менее, если не оговорено противное, норма в  $\mathbb{R}^n$  предполагается евклидовой.

Через  $sh(\Lambda)$  будем обозначать длину кратчайшего ненулевого вектора решетки  $\Lambda$ . Очевидно, что  $sh(\Lambda) = \lambda_1$ . В качестве следствия второй теоремы Минковского выше была получена оценка сверху для кратчайшего вектора решетки вектора

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} \cdot \sqrt[n]{\det(\Lambda)}.$$

Оценка снизу для кратчайшего вектора решетки дается следующей теоремой.

**Теорема 10.** Пусть  $B$  — базис решетки и  $\mathbf{b}^*$  — соответствующий ортогональный базис, полученный с помощью процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта. Тогда

$$\lambda_1 \geq \min_j \|\mathbf{b}_j^*\| > 0.$$

**Задача.** Докажите эту теорему. **Указание.** Докажите, что для целочисленного вектора  $\mathbf{x}$  выполняется неравенство

$$\|B\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{b}_i\|, \text{ где } i = \max\{i \mid x_i \neq 0\}.$$

Всюду далее в вычислительных задачах рассматриваются целочисленные решетки в  $\mathbb{Q}^n$ , поскольку вещественные числа невычислимы.

**Задачи SVP нахождения кратчайшего вектора (Shortest Vector Problem).**

### 1. Точное решение задачи SVP.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$ .
- **Найти:** ненулевой вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{v}\| = \lambda_1$ .

### 2. Поиск короткого вектора в решетке. Оценка качества решения

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$ .
- **Найти:** ненулевой вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$  и указать  $\gamma \geq 1$ , для которого  $\|\mathbf{v}\| \leq \gamma \lambda_1$ .

### 3. Поиск $\gamma$ -приближения.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$  и число  $\gamma \geq 1$ .
- **Найти:**  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{v}\| \leq \gamma \lambda_1$ .

## Задачи CVP нахождения б вектора (Closest Vector Problem).

### 1. Точное решение задачи CVP.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$  и вектор  $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}^n$ .
- **Найти:**  $\mathbf{x} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{t} - \mathbf{x}\|$  минимальна.

### 2. Поиск ближайшего вектора в решетке. Оценка качества решения

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$  и вектор  $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}^n$ .
- **Найти:**  $\mathbf{v} \in \Lambda$  и указать  $\gamma \geq 1$ , для которого  $\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\| \leq \gamma \|B\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  при всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$ .

### 3. Поиск $\gamma$ -приближения.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$ , вектор  $\mathbf{t}$  и число  $\gamma$ .
- **Найти:**  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\| \leq \gamma \|B\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  при всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$ .

При исследовании задач CVP и SVP могут быть поставлены различные вычислительные задачи. Перечислим эти задачи в порядке сложности.

Сначала перечислим вычислительные задачи для точного решения задач CVP и SVP.

- **Задача поиска.** Найти (ненулевой) вектор решетки  $\mathbf{x} \in \Lambda$  минимизирующий величину  $\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|$  (соответственно,  $\|\mathbf{x}\|$ ).
- **Задача оптимизации.** Найти минимум  $\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|$  (соответственно,  $\|\mathbf{x}\|$ ) по всем  $\mathbf{x} \in \Lambda$  (соответственно,  $\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{0\}$ ).
- **Задача распознавания.** По заданному рациональному числу  $r > 0$  определить, существует ли (ненулевой) вектор решетки  $\mathbf{x}$ , для которого  $\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \leq r$  (соответственно,  $\|\mathbf{x}\| \leq r$ ).

Теперь сформулируем подобные вычислительные задачи для поиска  $\gamma$ -приближений задач CVP и SVP.

**Задача поиска приближенного решения.** Найти (ненулевой) вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , такой что  $\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\| \leq \gamma \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  для всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$  ( $\|\mathbf{v}\| \leq \gamma \cdot \|\mathbf{y}\|$  для всех  $\mathbf{y} \in \Lambda \setminus \{0\}$ ).

**Приближенная задача оптимизации.** Найти (ненулевое) число  $d$ , такое что  $\|\mathbf{z} - \mathbf{t}\| \leq d \leq \gamma \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  для всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$  при некотором  $\mathbf{z} \in \Lambda$  ( $\lambda_1 \leq d < \gamma \cdot \lambda_1$ ).

Во всех известных в настоящее время полиномиальных приближенных алгоритмах для задач SVP и CVP множитель  $\gamma(n)$  экспоненциален.

Имеется множество вычислительных задач на решетках, которые решаются эффективно. Перечислим некоторые из них.

1. **Задача принадлежности.** Даны базис  $B$  решетки и вектор  $\mathbf{x}$ . Проверить, является ли  $\mathbf{x}$  элементом решетки  $L(B)$ ?
2. **Нахождение ядра.** Дана целочисленная матрица  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ . Найти базис решетки  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{x} = 0\}$ . Аналогичная задача для сравнений по модулю. Даны натуральное число  $M$  и матрица  $A \in \mathbb{Z}_M^{m \times n}$ . Найти базис решетки  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{x} = 0 \pmod{M}\}$ .
3. **Построение базиса.** Задан набор целочисленных векторов. Найти базис решетки, которую они порождают.
4. **Объединение решеток.** Даны две решетки  $L(B_1)$  и  $L(B_2)$  в  $\mathbb{Z}^n$ . Найти минимальную содержащую их решетку.

## 2.5. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРЫ. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ПРОСТОТЫ

5. **Построение двойственной решетки.** Дана решетка  $L(B)$ . Построить двойственную решетку, иными словами множество всех векторов  $\mathbf{y}$  в  $\text{Span}(L(B))$ , для которых скалярные произведения  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  целочисленны при всех  $\mathbf{x} \in L(B)$ .
6. **Пересечение решеток.** Даны две решетки  $L(B_1)$  и  $L(B_2)$  в  $\mathbb{Z}^n$ . Найти базис пересечения  $L(B_1) \cap L(B_2)$ .
7. **Задача эквивалентности решеток.** Даны две решетки  $L(B_1)$  и  $L(B_2)$  в  $\mathbb{Z}^n$ . Проверить равенство  $L(B_1) = L(B_2)$ .
8. **Проверка цикличности решетки.** Дана решетка  $L(C)$ . Проверить, что решетка циклична, т.е. при циклической перестановке ее элементов снова получаются элементы этой же решетки.

## 2.5 Применение алгебры. Полиномиальный алгоритм проверки простоты чисел

## 2.6 Полиномиальная детерминированная проверка простоты

Проблема проверки простоты натурального числа является одной из древнейших и классических задач теории чисел.

Неэффективные тесты (типа решета Эратосфена) были известны еще до нашей эры.

С развитием теории алгоритмов возник вопрос о существовании эффективных (полиномиальных) алгоритмов проверки простоты числа, которые за полиномиальное от длины входа ( $\lceil \log(n + 1) \rceil$  для числа  $n$ , заданного в двоичной системе) проверяют, является ли  $n$  простым числом.

Мы описываем ниже модифицированный алгоритм проверки простоты, предложенный в 2002 г. тремя индийскими математиками. Более точно, мы опираемся на статьи [AKS02; AKS04].

## Некоторые определения и обозначения

**Определение 2.6.1.** Через  $\text{НОД}(a, n)$  обозначим наибольший общий делитель (НОД) чисел  $a$  и  $n$ .

**Определение 2.6.2.** Пусть  $\text{НОД}(r, n) = 1$ . Тогда  $o_r(n)$  — порядок  $n$  по модулю  $r$ : минимальное натуральное  $k$  такое, что

$$n^k \equiv 1 \pmod{r}.$$

Через  $\varphi(r)$  обозначается **функция Эйлера**, равная числу взаимно простых с  $r$  чисел, не превосходящих  $r$ .

**Определение 2.6.3.** Через  $\mathbb{Z}_n$  обозначим кольцо целых чисел по модулю  $n$ , а через  $\mathbb{F}_p$  — конечное поле из  $p$  элементов, где  $p$  — простое число. Через  $\mathbb{Z}_n[X]$  обозначим кольцо многочленов с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_n$ , а через  $\mathbb{F}_p[X]$  — кольцо многочленов с коэффициентами из  $\mathbb{F}_p$ .

**Определение 2.6.4.** Напомним, что для простого  $p$  и неприводимого в  $\mathbb{F}_p$  многочлена  $h(x)$  степени  $d$ ,  $\mathbb{F}_p[X]/(h(X))$  — конечное поле порядка  $p^d$ . Мы будем пользоваться обозначением

$$f(X) \equiv g(X) \pmod{h(X), n}$$

для обозначения уравнения  $f(X) = g(X)$  в кольце  $\mathbb{Z}_n[X]/(h(X))$ .

## Идея и основная лемма

**Лемма 8.** Пусть  $a$  — целое число,  $n$  — натуральное,  $n \geq 2$  и  $\text{НОД}(a, n) = 1$ . Тогда  $n$  простое тогда и только тогда, когда

$$(X + a)^n = X^n + a \pmod{n}.$$

**Доказательство.** Заметим, что если  $0 < i < n$ , то коэффициент при  $X^i$  в  $(X + a)^n - (X^n + a)$  равен  $\binom{n}{i} a^{n-i}$ .

Рассмотрим два случая.

1.  $n$  — простое. Тогда  $\binom{n}{i} \pmod{n} = 0$  и все коэффициенты равны нулю.

2.  $n$  — составное. Рассмотрим его простой делитель  $q$  и пусть  $k$  — максимальная степень такая, что  $n$  делится на  $q^k$ . Тогда  $q^k$  не является делителем  $\binom{n}{q}$  и взаимно просто с  $a^{n-q}$  (докажите это в качестве упражнения). Следовательно, коэффициент при  $X^q$  не равен нулю (mod  $n$ ).

□

Что дает нам эта лемма? На первый взгляд ничего, т.к. вычисление левой части тождества требует вычисления  $n$  коэффициентов в худшем случае. Однако она дала идею нового простого вероятностного теста на простоту, которая и привела к построению детерминированного полиномиального алгоритма проверки простоты числа. В некотором смысле можно рассматривать этот результат как *дерандомизацию соответствующего вероятностного алгоритма проверки специального тождества*.

Основная идея дерандомизации — заменить основное тождество на другое:

$$(X + a)^n = X^n + a \pmod{X^r - 1, n},$$

для некоторого специального  $r$ , ограниченного полиномом от  $\log n$ . К сожалению, в таком виде этому тождеству будут удовлетворять и некоторые составные числа. Ключевая идея авторов алгоритма заключалась в проверке данного тождества для целой серии значений  $a$ , число которых ограничено полиномом от  $\log n$ .

Им удалось показать, что данной серии тождеств удовлетворяют только простые числа, и, таким образом, построить детерминированный полиномиальный алгоритм проверки простоты произвольного натурального числа. На вход алгоритма подается число  $n$ , записанное в двоичной системе, а результатом алгоритма является 1, если  $n$  — простое, и 0, если  $n$  — составное.

## Время работы

Покажем, что алгоритм 3 полиномиален.

Приведем без доказательства известный факт из теории чисел.

**Лемма 9.** *Обозначим через  $\text{LCM}(m)$  наименьшее общее кратное первых  $m$  натуральных чисел. Тогда  $\text{LCM}(m)$  не меньше  $2^m$  при  $m \geq 7$ .*

**Алгоритм 3** Полиномиальный алгоритм проверки простоты**Вход:** целое  $n > 1$ .**Выход:** целое 1 — если простое, и 0, если  $n$  — составное.

1. **if** ( $n = a^b$  для  $a \in N$  и  $b > 1$ ) **return** 0.
2. Найти наименьшее  $r$  такое, что  $o_r(n) > \log^2 n$ .
3. **for**  $a = 1$  **to**  $r$   
**do if**  $1 < \text{НОД}(a, n) < n$  **return** 0.
4. **if**  $n \leq r$ , **return** 1.
5. **for**  $a = 1$  **to**  $\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \rfloor$  **do**  
**if**  $(X + a)^n \not\equiv X^n + a \pmod{X^r - 1, n}$  **return** 0.
6. **return** 1.

**Лемма 10.** Существует  $r \leq \max(3, \lceil \log^5 n \rceil)$ , такое, что  $o_r(n) > \log^2 n$ .

*Доказательство.* При  $n = 2$  значение  $r = 3$  тривиально удовлетворяет всем условиям. Предположим, что  $n > 2$ .

Тогда  $\lceil \log^5 n \rceil > 10$ , и мы можем воспользоваться леммой 9.

Пусть  $r_1, r_2, \dots, r_t$  — все числа, такие, что  $o_{r_i}(n) \leq \log^2 n$ , а  $q_1, \dots, q_k$  — делители  $n$ . Пусть  $M$  — множество, состоящее из элементов  $r_i, q_j$  и всевозможных произведений  $r_i q_j$ . Каждое из чисел множества  $M$  должно делить произведение

$$n \cdot \prod_{i=1}^{\lceil \log^2 n \rceil} (n^i - 1) < n^{\log^4 n} \leq 2^{\log^5 n}.$$

По лемме наименьшее общее кратное первых  $\lceil \log^5 n \rceil$  натуральных чисел не меньше  $2^{\lceil \log^5 n \rceil}$ , и, следовательно, существует число  $s \leq \lceil \log^5 n \rceil$ , такое, что  $s \notin M$ . Если  $\text{НОД}(s, n) = 1$ , то все доказано. Если же  $\text{НОД}(s, n) > 1$ , то, поскольку  $s$  не делит  $n$  и  $\text{НОД}(s, n) = q_j$  при некотором  $j$ , то  $r = \frac{s}{\text{НОД}(s, n)} = \frac{s}{q_j} \neq r_i$  ни при каком  $i$ , и, следовательно,  $o_r(n) > \log^2 n$ .





**Упражнение 2.6.1.** Покажите, что шаг 1 можно выполнить за полиномиальное время.

Из леммы 10 вытекает, что шаги 2–5 выполнимы за полиномиальное время.

Отсюда получаем следующую теорему.

**Теорема 11.** Алгоритм 3 полиномиален.

**Упражнение 2.6.2.** Для каких  $n$  можно исключить шаг 4 из алгоритма 3?

### Корректность

То, что для простого  $n$  алгоритм выдает 1, очевидно следует из описания алгоритма.

Нам надо доказать, что если алгоритм выдает 1, то  $n$  является простым числом (т. е. если число составное, то сработает какая-либо из «проверок» алгоритма, и алгоритм вернет 0).

Итак, допустим, число  $n$  — составное, но шаги 1 и 3 его не выявили. Рассмотрим последний «фильтр» — самый содержательный шаг алгоритма, шаг 5, внимательно.

Поскольку  $o_r(n) > 1$  (кстати, почему?), должно существовать простое  $p$ , делящее  $n$ , такое, что  $o_r(p) > 1$  (заметим, что если  $n$  — простое, то  $p = n$ ). Зафиксируем числа  $p$  и  $n$ . Пусть также  $l = \lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \rfloor$ .

На шаге 5 алгоритма проверяется  $l$  уравнений. Поскольку по нашему предположению алгоритм не выдает 0, то для любого  $0 \leq a \leq l$

$$(X + a)^n = X^n + a \pmod{X^r - 1, n},$$

откуда следует

$$(X + a)^n = X^n + a \pmod{X^r - 1, p}.$$

С другой стороны, из основной леммы 8 следует, что

$$(X + a)^p = X^p + a \pmod{X^r - 1, p}.$$

Из двух предыдущих равенств следует, что

$$(X + a)^{n/p} = X^{n/p} + a \pmod{X^r - 1, p}.$$

**Упражнение 2.6.3.** Докажите этот факт, используя тождество

$$(X + a)^p \equiv X^p + a^p \pmod{p}.$$

*Доказательство.* Отметим, что

$$\mathbb{Z}[X]/(X^r - 1, p) = \mathbb{F}_p[X]/(X^r - 1).$$

Пусть

$$(X + a)^{n/p} - X^{n/p} - a = q(X) \in \mathbb{F}_p[X].$$

Тогда в кольце  $\mathbb{F}_p[X]$  выполняется равенство

$$\left( (X + a)^{n/p} - X^{n/p} - a \right)^p = (q(X))^p.$$

Возводя в степень  $p$  в кольце  $\mathbb{F}_p[X]$  левую часть равенства, получим

$$\begin{aligned} \left( (X + a)^{n/p} - X^{n/p} - a \right)^p &= (X + a)^n - (X^{n/p} + a)^p = \\ &= (X + a)^n - (X^n + a). \end{aligned}$$

Следовательно, в кольце  $\mathbb{F}_p[X]$  выполняется равенство

$$(X + a)^n - (X^n + a) = (q(X))^p.$$

С другой стороны, по условию задачи в кольце  $\mathbb{F}_p[X]$  выполняется равенство

$$(X + a)^n - (X^n + a) = s(X)(X^r - 1).$$

Следовательно, в кольце  $\mathbb{F}_p[X]$  выполняется равенство

$$s(X)(X^r - 1) = (q(X))^p.$$

Заметим, что многочлен  $X^r - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$  не имеет кратных корней в его поле разложения. Действительно, его производная равна  $rX^{r-1}$ , а согласно условию  $o_r(p) > 1$  и, следовательно,  $\text{НОД}(r, p) = 1$ . Поэтому  $r \neq 0$  в кольце

$\mathbb{Z}_p$ , и равенство  $rX^{r-1}$  возможно только при  $X = 0$ . Но  $X = 0$  не является корнем многочлена  $X^r - 1$ , что и означает простоту его корней. Тогда из теоремы единственности разложения на множители в кольце многочленов  $\mathbb{F}_p[X]$  следует, что многочлен  $q(X)$  делится на многочлен  $X^r - 1$ , т. е.  $q(X) = q_1(X)(X^r - 1)$ . Следовательно, в кольце  $\mathbb{F}_p[X]$  выполняется равенство

$$(X + a)^{n/p} - X^{n/p} - a = q(X) = q_1(X)(X^r - 1),$$

т. е. выполняется равенство

$$(X + a)^{n/p} - X^{n/p} - a = q_1(X)(X^r - 1) \equiv 0 \pmod{X^r - 1, p}.$$

□

**Определение 2.6.5.** Для полинома  $f(X)$  натуральное число  $m$  принадлежит множеству  $I[f(X)]$ , если

$$f(X)^m = f(X^m) \pmod{X^r - 1, p}.$$

**Лемма 11.** Множество  $I[f(X)]$  замкнуто относительно умножения. Если  $m_1, m_2 \in I[f(X)]$ , то  $m_1 \cdot m_2 \in I[f(X)]$ .

*Доказательство.* Поскольку  $m_1 \in I[f(X)]$ , то

$$[f(X)]^{m_1 \cdot m_2} \equiv [f(X^{m_1})]^{m_2} \pmod{X^r - 1, p}.$$

Поскольку  $m_2 \in I[f(X)]$ , то заменяя  $X$  на  $X^{m_1}$ , имеем

$$\begin{aligned} [f(X^{m_1})]^{m_2} &\equiv f(X^{m_1 \cdot m_2}) \pmod{X^{m_1 r} - 1, p} \equiv \\ &\equiv f(X^{m_1 \cdot m_2}) \pmod{X^r - 1, p}, \end{aligned}$$

поскольку  $X^r - 1$  является делителем многочлена  $X^{m_1 r} - 1$ .

Из этих двух соотношений получаем

$$[f(X)]^{m_1 \cdot m_2} \equiv f(X^{m_1 \cdot m_2}) \pmod{X^r - 1, p}.$$

□

**Лемма 12.** Если  $m \in I[f(X)]$  и  $m \in I[g(X)]$ , то

$$m \in I[f(X) \cdot g(X)].$$

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} [f(X) \cdot g(X)]^m &= [f(X)]^m \cdot [g(X)]^m = \\ &= f(X^m) \cdot g(X^m) \pmod{X^r - 1, p}. \end{aligned}$$

Определим два множества, играющие ключевую роль в доказательстве корректности алгоритма:

$$I = \left\{ \left( \frac{n}{p} \right)^i \cdot p^j \mid i, j \geq 0 \right\},$$

$$P = \left\{ \prod_{a=0}^l (X + a)^{e_a} \mid e_a \geq 0 \right\}.$$

□

Простым следствием лемм 11 и 12 является

**Лемма 13.** Для любого  $m \in I$  выполнено  $m \in I[P]$ .

Определим теперь две группы, связанные с введенными выше двумя множествами. Пусть  $G$  обозначает мультипликативную группу всех вычетов чисел из  $I$  по модулю  $r$ . Тогда  $G$  является подгруппой мультипликативной группы  $\mathbb{Z}_r^*$ , поскольку, как отмечено выше,  $\text{НОД}(n, r) = \text{НОД}(p, r) = 1$ . Пусть  $t = |G|$  — число элементов группы  $G$ . Группа  $G$  порождается элементами  $n$  и  $p$  по модулю  $r$  и, поскольку,  $o_r(n) > \log^2 n$ , то  $t > \log^2 n$ .

Воспользуемся далее некоторыми известными фактами из теории конечных полей.

**Факт 1.** Мультипликативная группа любого конечного поля циклическая.

**Факт 2.** Для любого поля  $F$  существует его алгебраическое замыкание  $\overline{F}$ .

Факт 3. Рассмотрим расширение поля  $\mathbb{F}_p$ , полученное присоединением всех корней многочлена  $X^r - 1$ . Имеем  $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_p(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \subset \overline{\mathbb{F}_p}$ .

Факт 4. Возьмем мультипликативную подгруппу расширенного поля, состоящую из корней многочлена  $X^r - 1$ . Эта группа циклическая (из факта 1, как подгруппа циклической группы). Она содержит примитивный элемент  $\alpha$  ( $r$ -й корень из единицы, порождающий всю циклическую группу). Тогда  $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_p(\alpha) = F$ .

Возьмем минимальный многочлен элемента  $\alpha$  над полем  $\mathbb{F}_p$  и обозначим его  $h(X)$ . Этот многочлен неприводим в  $\mathbb{F}_p[X]$  и имеет степень  $o_r(p)$  (см. [ЛН88]). Такой многочлен всегда существует, если  $\text{НОД}(p, r) = 1$ , причем его степень  $o_r(p) > 1$ . Пусть  $H$  обозначает множество всех вычетов многочленов из  $P$  по модулю  $h(X)$  и  $p$ .

**Упражнение 2.6.4.** Доказать, что фактор-множество  $H$  является группой.

Группа  $H$  порождается элементами  $X, X+1, X+2, \dots, X+l$  в поле  $F = \mathbb{F}_p[X]/(h(X))$  и является подгруппой мультипликативной группы поля  $F$ .

Следующие две леммы дают нижнюю и верхнюю оценку размера группы  $H$ .

**Лемма 14.**  $|H| \geq \binom{t+l}{t-1}$ .

*Доказательство.* Заметим сначала, что  $X$  — примитивный  $r$ -й корень из единицы в  $F$  (см. факт 4 выше).

Покажем теперь, что любые два различных многочлена в множестве  $P$  степени меньше, чем  $t$ , соответствуют различным элементам  $H$ . Пусть  $f(X)$  и  $g(X)$  — такие многочлены из  $P$ . Предположим  $f(X) = g(X)$  в поле  $F$ , и пусть  $m \in I$ . Имеем  $[f(X)]^m = [g(X)]^m$  в  $F$ . Поскольку  $m \in I[f]$ ,  $m \in I[g]$ , и  $h(X)$  является делителем  $X^r - 1$ , получаем, что в поле  $F$  выполнено

$$f(X^m) = g(X^m).$$

Отсюда вытекает, что  $X^m$  является корнем многочлена  $Q(Y) = f(Y) - g(Y)$  для любого  $m \in G$ . Поскольку  $\text{НОД}(m, r) = 1$  (т.к.  $G$  — подгруппа  $\mathbb{Z}_r^*$ ), любое такое  $X^m$  является примитивным  $r$ -м корнем из единицы. Следовательно, должно быть  $|G| = t$  различных корней многочлена  $Q(Y)$

в поле  $F$ . Однако степень  $Q(Y)$  меньше  $t$  в силу выбора  $f$  и  $g$ . Это противоречие доказывает, что  $f(X) \neq g(X)$  в  $F$ .

Заметим, что  $i \neq j$  в  $F_p$  для  $1 \leq i \neq j \leq l$ , поскольку  $l = \lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \rfloor < \sqrt{r} \log n < r$ , и  $p > r$ .

Значит все элементы  $X, X + 1, X + 2, \dots, X + l$  различны в поле  $F$ . Также, поскольку степень  $h$  больше единицы,  $X + a \neq 0$  в  $F$  для всех  $a$ ,  $0 \leq a \leq l$ . Значит, существует не менее  $l + 1$  различных полиномов первой степени в  $H$ . Отсюда вытекает, что существует не менее  $\binom{t+l}{t-1}$  различных полиномов степени  $< t$  в  $H$ .  $\square$

**Лемма 15.** Если  $n$  не является степенью  $p$ , то

$$|H| \leq n^{\sqrt{t}}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим следующее подмножество множества  $I$ :

$$I_1 = \left\{ \left( \frac{n}{p} \right)^i \cdot p^j \mid 0 \leq i, j \leq \lfloor \sqrt{t} \rfloor \right\}.$$

Если  $n$  не является степенью простого числа, то

$$|I_1| = (\lfloor \sqrt{t} \rfloor + 1)^2 > t.$$

Поскольку  $|G| = t$ , по крайней мере два числа из  $I_1$  должны быть равны по модулю  $r$ . Пусть это будут  $m_1$  и  $m_2$  и  $m_1 > m_2$ . Имеем

$$X^{m_1} = X^{m_2} \pmod{X^r - 1}.$$

Пусть  $f(X) \in P$ . Тогда

$$\begin{aligned} [f(X)]^{m_1} &= f(X^{m_1}) \pmod{X^r - 1, p} = \\ &= f(X^{m_2}) \pmod{X^r - 1, p} = \\ &= [f(X)]^{m_2} \pmod{X^r - 1, p}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что в поле  $F$

$$[f(X)]^{m_1} = [f(X)]^{m_2}.$$

Следовательно,  $f(X) \in H$  является корнем многочлена  $Q_1(Y) = Y^{m_1} - Y^{m_2}$  в поле  $F$ . Поскольку  $f(X)$  — произвольный элемент  $H$ , многочлен  $Q_1(Y)$  имеет не менее  $|H|$  различных корней в поле  $F$ . Однако степень многочлена  $Q_1(Y)$  равна

$$m_1 \leq \left( \frac{n}{p} \cdot p \right)^{\lfloor \sqrt{t} \rfloor} \leq n^{\lfloor \sqrt{t} \rfloor}.$$

Это доказывает, что  $|H| \leq n^{\lfloor \sqrt{t} \rfloor}$ .  $\square$

Завершающей является лемма, основанная на сравнении нижней и верхней оценок из лемм 14 и 15.

**Лемма 16.** *Если алгоритм выдает ПРОСТОЕ, то  $n$  является простым числом.*

*Доказательство.* Предположим алгоритм выдает ПРОСТОЕ. Из леммы 14 вытекает, что для  $t = |G|$  и  $l = \lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \rfloor$ :

$$\begin{aligned} |H| &\geq \binom{t+l}{t-1} = \frac{1}{(l+1)!} \cdot t \cdot \dots \cdot (t+l) \geq \\ &\geq \frac{1}{(l+1)!} \cdot (\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor + 1) \cdot \dots \cdot (\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor + l + 1) \\ &\quad (\text{поскольку } t > \sqrt{t} \log n) = \\ &= \binom{l+1 + \lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor}{\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor} \geq \binom{2\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor + 1}{\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor} \\ &\quad (\text{поскольку } l = \lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \rfloor \geq \lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor) > \\ &\quad > 2^{\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor + 1} \geq n^{\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

поскольку  $\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor > \lfloor \log^2 n \rfloor \geq 1$  и  $\binom{2m+1}{m} > 2^{m+1}$  при  $m \geq 1$ .

По лемме 15  $|H| \leq n^{\sqrt{t}}$ , если  $n$  не степень  $p$ . Следовательно,  $n = p^k$  для некоторого  $k > 0$ . Если  $k > 1$ , то алгоритм выдает 0 на шаге 1. Значит,  $n = p$ .  $\square$

Окончательно получаем следующую теорему.

**Теорема 12.** *Алгоритм выдает ПРОСТОЕ  $\iff n$  — простое.*



## Глава 3

# Алгоритмические аспекты теории решеток и их применение в криптографии

**3.1 Кратчайший ненулевой вектор решетки. Ближайший вектор к заданному вектору решетки. Приближенные алгоритмы. Алгоритм Ловаса**

**3.2 Основные понятия теории решеток. Критерий полноты решетки. Лемма Минковского**

**3.2.1 Введение в решетки**

Вначале напомним некоторые результаты из теории групп.

**Определение 3.2.1.** *Элементы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  аддитивной абелевой группы  $M$  называются системой образующих группы, рассматриваемой как  $\mathbb{Z}$ -модуль, если любой элемент  $\alpha \in M$  можно представить в виде  $\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$ , где  $c_i \in \mathbb{Z}$ . Система образующих называется базисом, если такое представление единственно.*

**Определение 3.2.2.** Элемент  $a$  аддитивной абелевой группы  $M$  называется элементом конечного порядка, если  $ca = 0$  при некотором  $c \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 13.** Если абелева группа без элементов конечного порядка имеет конечную систему образующих, то она имеет и базис. Число элементов базиса является инвариантом группы.

*Доказательство.* Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — произвольная система образующих. Заметим, что при замене одной образующей на новую, полученную добавлением к ней другой, умноженной на произвольное целое число, снова получится система образующих. Действительно, пусть  $\alpha'_1 = \alpha_1 + k\alpha_2$ . Тогда для любого  $\alpha \in M$  имеем

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = c_1\alpha'_1 + (c_2 - kc_1)\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n.$$

Если элементы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  линейно независимы, то они образуют базис  $M$ . Допустим теперь, что они линейно зависимы, т. е. выполняется соотношение

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$$

при некоторых одновременно не равных нулю целых  $c_1, \dots, c_n$ . Выберем среди ненулевых элементов коэффициент  $c_i$  с наименьшим абсолютным значением. Без ограничения общности можно считать, что это  $c_1$ . Пусть не все коэффициенты  $c_i$  делятся на  $c_1$ , например,  $c_2 = c_1q + c'$ , где  $0 < c' < |c_1|$ . Перейдем к новой системе образующих  $\alpha'_1 = \alpha_1 + q\alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Тогда будет выполняться соотношение

$$c_1\alpha'_1 + c'\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0,$$

причем  $0 < c' < |c_1|$ . Продолжим данную процедуру до тех пор пока через конечное число шагов (не более  $|c_1|$ ) не получим соотношение

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n = 0$$

с целыми коэффициентами  $k_i$ , в котором один из коэффициентов, например,  $k_1$  является делителем остальных. Сократив последнее выражение на  $k_1$ , получим

$$\beta_1 + l_2\beta_2 + \dots + l_n\beta_n = 0$$

с целыми  $l_2, \dots, l_n$ . Следовательно,  $\beta_2, \dots, \beta_n$  — система образующих группы  $M$ , состоящая из  $(n - 1)$ -го элемента. Теперь можем применить описанную здесь процедуру к новой системе образующих. В результате получим либо базис, либо новую систему образующих с меньшим количеством элементов. Повторив эту процедуру конечное число раз, получим базис группы.

Напомним, что  $M \otimes \mathbb{Q} = M \times \mathbb{Q} / \sim$ , где отношение  $\sim$  задается формулой

$$(k\alpha, r) \sim (\alpha, kr),$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Инвариантность числа элементов базиса следует из инвариантности размерности векторного пространства  $M \otimes \mathbb{Q}$ .  $\square$

Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_m$  и  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$  — два базиса  $\mathbb{Z}$ -модуля  $M$ , не имеющего элементов конечного порядка. Тогда матрицы перехода одного базиса в другой целочисленные. Поскольку произведения таких матриц равны единице, их определители равны  $\pm 1$ . Следовательно, преобразования базисов задаются унимодулярными матрицами порядка  $m$ .

**Теорема 14.** *В абелевой группе  $M$  без элементов конечного порядка и с конечной системой образующих всякая подгруппа  $N$  также имеет конечное число образующих и, следовательно, имеет базис. При этом для любого базиса  $\omega_1, \dots, \omega_m$  группы  $M$  для  $N$  существует базис вида*

$$\begin{aligned} \eta_1 &= c_{11}\omega'_1 + c_{12}\omega'_2 + \dots + c_{1k}\omega'_k + \dots + c_{1m}\omega'_m \\ \eta_2 &= \dots \dots \dots c_{22}\omega'_2 + \dots + c_{2k}\omega'_k + \dots + c_{2m}\omega'_m \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \eta_k &= \dots \dots \dots c_{k1}\omega'_k + \dots + c_{km}\omega'_m \end{aligned},$$

где базис  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$  отличается от базиса  $\omega_1, \dots, \omega_m$  только перестановкой элементов.

**Определение 3.2.3.** Пусть  $\mathbb{R}^n$  — евклидово пространство размерности  $n$ , рассматриваемое как группа относительно сложения векторов. Решеткой в  $\mathbb{R}^n$  называется его подгруппа

$$\Lambda = L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{b}_i \mid x_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

порожденная системой линейно независимых над  $\mathbb{R}$  векторов  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^n$ . Целые числа  $n$  и  $m$  называются, соответственно, размерностью и рангом решетки  $\Lambda$ . Если  $m = n$ , то решетка называется полной, в противном случае — неполной. Набор векторов-столбцов  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  называется базисом решетки  $\Lambda$  и может быть представлен в виде  $n \times m$ -матрицы

$$B = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m].$$

**Определение 3.2.4.** Решетка  $\Lambda = L(B)$  называется целочисленной, если матрица  $B$  целочисленная.

**Замечание.** В силу теорем 13 и 14 число  $m$  из определения 3 задается решеткой однозначно и называется рангом решетки  $\Lambda$ . Следовательно, ранг решетки равен рангу матрицы, строками которой являются координаты линейно независимых образующих решетки, или же ранг матрицы, строками которой являются попарные скалярные произведения таких образующих векторов.

В векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  определены скалярное произведение и норма.

**Определение 3.2.5.** Подгруппа  $G$  группы  $\mathbb{R}^n$  называется дискретной, если в шаре  $U(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  радиуса  $r$  имеется только конечное число элементов группы  $G$ .

**Лемма 17.** Пусть имеются два набора линейно независимых векторов  $B$  и  $B'$ , задающие одну и ту же решетку размерности  $n$ . Тогда ранги матриц  $B$  и  $B'$  равны и существует единственная унимодулярная  $m \times m$ -матрица  $A$ , такая что  $BA = B'$ .

**Задача.** Доказать лемму 17.

Скалярное произведение в векторном пространстве  $\mathbb{R}^n$  определяет норму  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ .

**Определение 3.2.6.** Подгруппа  $G$  группы  $\mathbb{R}^n$  называется дискретной, если в шаре  $U(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  при некотором  $r > 0$  имеется только конечное число элементов группы  $G$ .

**Лемма 18.** Решетка является дискретной группой.

*Доказательство.* Выберем базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  в решетке  $\Lambda = L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ . Дополним этот набор линейно независимых векторов в  $\mathbb{R}^n$  до базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ , содержащего решетку. Выберем ненулевой элемент  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , ортогональный векторам  $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ . Положим  $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{x}, \mathbf{b}_1)}$ . Заметим, что согласно определению элемента  $x$  знаменатель не равен нулю и  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{b}_j) = \delta_{1j}$ . Аналогично определяются элементы  $\mathbf{f}_i$ , причем выполняются равенства  $(\mathbf{f}_i, \mathbf{b}_j) = \delta_{ij}$ .

Пусть элемент решетки  $\mathbf{z}$  имеет длину меньше  $r$ . Выразим его через базис

$$\mathbf{z} = a_1 \mathbf{b}_1 + \dots + a_n \mathbf{b}_n$$

где  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ , причем  $a_k = (\mathbf{z}, \mathbf{f}_k)$  по определению векторов  $\mathbf{f}_k$ . Тогда согласно неравенству Коши

$$|a_k| = |(\mathbf{z}, \mathbf{f}_k)| \leq \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{f}_k\| < r \|\mathbf{f}_k\|.$$

Следовательно, ввиду целочисленности коэффициентов  $a_k$ , в шаре радиуса  $r$  лежит конечное число элементов решетки.  $\square$

**Определение 3.2.7.** Пусть  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — базис решетки. Основным параллелепипедом решетки  $L(B)$  называется множество

$$T = \{Bc \mid 0 \leq c_i < 1\}.$$

Объем основного параллелепипеда называется детерминантом решетки и обозначается  $\det(L(B))$ .

**Лемма 19.** Детерминант решетки не зависит от базиса.

*Доказательство.* Дополним базис решетки до базиса векторного пространства  $\mathbb{R}^n$  взаимно ортогональными векторами единичной длины  $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ , ортогональными подпространству, порожденному векторами  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ . Тогда объем основного параллелепипеда на базисе  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  равен объему основного параллелепипеда на базисе  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Пусть  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  — другой базис решетки. Тогда его можно дополнить теми же векторами  $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$  до базиса в  $\mathbb{R}^n$ . Преобразование базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  в базис  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  продолжается до унимодулярного преобразования базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  в базис  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ .

Объем основного параллелепипеда равен абсолютной величине определителя, строками которого являются координаты базисных векторов,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поскольку по лемме 17 базисы связаны унимодулярными преобразованиями, соответствующие объемы равны.  $\square$

**Лемма 20.** Если  $T$  — основной параллелепипед полной решетки  $\Lambda$ , то имеется разбиение

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\mathbf{z} \in \Lambda} \mathbf{z} + T$$

на непересекающиеся подмножества, т.е.  $\mathbf{z} + T \cap \mathbf{w} + T = \emptyset$  при  $\mathbf{z} \neq \mathbf{w} \in \Lambda$ .

**Упражнение.** Доказать лемму 20.

**Лемма 21.** Пусть  $M$  — решетка. Для любого  $r > 0$  множество  $N = \{\mathbf{z} \in M \mid \mathbf{z} + T \cap U(r) \neq \emptyset\}$  конечно.

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — базис решетки  $M$ . Положим

$$d = \|\mathbf{b}_1\| + \dots + \|\mathbf{b}_n\|.$$

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{t} \in U(r)$ , где  $\mathbf{z} \in M$  и  $\mathbf{t} \in T$ . Тогда

$$\|\mathbf{t}\| = \|\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n\| \leq \alpha_1 \|\mathbf{b}_1\| + \dots + \alpha_n \|\mathbf{b}_n\| < d$$

и

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{t}\| < r + d,$$

т.е. множество  $N$  лежит в шаре радиуса  $r + d$  и, следовательно, согласно лемме 18 конечно.  $\square$

**Лемма 22.** Подгруппа  $M \subset \mathbb{R}^n$ , множество элементов которой дискретно, является решеткой.

*Доказательство.* Пусть  $L \subset \mathbb{R}^n$  — минимальное линейное пространство, содержащее группу  $M$ . Выберем в  $L$  базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  из элементов группы  $M$  и построим решетку  $M_0$  с этим базисом. Тогда  $M_0$  — подгруппа в  $M$ . Покажем, что индекс этой группы конечен. Для этого достаточно проверить, что факторгруппа  $M/M_0$  состоит из конечного числа элементов. Согласно лемме 20 элементы факторгруппы однозначно представляются элементами группы  $M$ , находящимися в основном параллелепипеде решетки  $M_0$ , содержащемся в шаре конечного радиуса. Поскольку группа  $M$  дискретна, число таких элементов конечно. Следовательно доказано, что группа  $M$  конечно порождена и, поэтому является решеткой.  $\square$

Из лемм 18 и 22 вытекает

**Следствие 4.** Подгруппа  $M \subset \mathbb{R}^n$  является решеткой тогда и только тогда, когда она дискретна.

**Лемма 23.** Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  базис решетки  $M$ . Тогда ее детерминант равен квадратному корню из определителя

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_m) \end{vmatrix}.$$

*Доказательство.* Детерминант решетки, согласно определению, равен абсолютной величине определителя матрицы

$$D = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ , а  $\mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_n$  — его ортогональное продолжение. Поэтому, он равен квадратному корню из квадрата определителя матрицы  $D$  и, следовательно, равен квадратному корню из определителя матрицы  $DD'$ , где

' — операция транспонирования. Имеем

$$\begin{aligned}
 DD' &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_m) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_m) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_m, \mathbf{b}_m) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Критерий полноты решетки. Теорема Минковского

**Теорема 15.** *Решетка  $\Lambda$  в линейном пространстве  $\mathbb{R}^n$  полна тогда и только тогда, когда в  $\mathbb{R}^n$  существует ограниченное множество  $U$ , сдвиги которого на векторы из  $\Lambda$  заполняют все пространство  $\mathbb{R}^n$ .*

*Доказательство.* Если решетка  $\Lambda$  полная, то в качестве  $U$  можно взять любой ее основной параллелепипед (лемма 20).

Пусть теперь решетка  $\Lambda$  неполная, и пусть  $U$  — произвольное ограниченное подмножество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существует такое  $r > 0$ , что  $\|\mathbf{x}\| < r$  для любого  $\mathbf{x} \in U$ . Пусть  $L_0 \subset \mathbb{R}^n$  — подпространство, порожденное решеткой  $\Lambda$ . Поскольку решетка неполная, то  $L_0$  — собственное подпространство и,



следовательно, существует вектор  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , имеющий длину больше  $r$  и ортогональный подпространству  $L_0$ . Покажем, что  $\mathbf{y}$  не покрывается сдвигами множества  $U$ . Пусть это не так, тогда при некоторых  $\mathbf{u} \in U, \mathbf{z} \in \Lambda$  выполняется равенство  $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{z}$ . Тогда согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{u}) \leq \|\mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{u}\| < r\|\mathbf{y}\|,$$

откуда  $\|\mathbf{y}\| < r$ . □

**Теорема 16. (лемма Минковского о выпуклом теле).** Пусть в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^n$  заданы полная решетка  $M$ , объем основного параллелепипеда которой равен  $\Delta$ , и ограниченное центрально симметричное выпуклое множество  $X$  с объемом  $v(X)$ . Если  $v(X) > 2^n \Delta$ , то множество  $X$  содержит по крайней мере одну отличную от нуля точку решетки  $M$ .

*Доказательство.* Докажем вначале, что если множество  $Y \subset \mathbb{R}^n$  таково, что все его сдвиги  $Y_{\mathbf{z}} = Y + \mathbf{z}$  на векторы  $\mathbf{z}$  из решетки  $M$  не пересекаются, то  $v(Y) \leq \Delta$ . Рассмотрим основной параллелепипед  $T$  решетки  $M$  и рассмотрим пересечения  $Y \cap T_{-\mathbf{z}}$ . Тогда по лемме 20

$$v(Y) = \sum_{\mathbf{z} \in M} v(Y \cap T_{-\mathbf{z}}),$$

причем по лемме 21 в этой сумме только конечное число слагаемых не равно нулю. Сдвиг множества  $Y \cap T_{-\mathbf{z}}$  на вектор  $\mathbf{z}$  равен  $Y_{\mathbf{z}} \cap T$ , поэтому  $v(Y \cap T_{-\mathbf{z}}) = v(Y_{\mathbf{z}} \cap T)$ . Следовательно,

$$v(Y) = \sum_{\mathbf{z} \in M} v(Y_{\mathbf{z}} \cap T).$$

Поскольку все  $Y_{\mathbf{z}}$  попарно не пересекаются, то сумма правой части не больше  $v(T)$ . Следовательно,  $v(X) \leq v(T) = \Delta$ .

Рассмотрим теперь множество  $\frac{1}{2}X$ , получающееся из  $X$  преобразованием сжатия с коэффициентом  $1/2$ . Тогда из условия теоремы следует, что

$v\left(\frac{1}{2}X\right) = \frac{1}{2^n}v(X) > \Delta$ . Если все сдвиги множества  $\frac{1}{2}X$  на элементы решетки попарно не пересекаются, то по доказанному выше должно выполняться неравенство  $v\left(\frac{1}{2}X\right) \leq \Delta$ , что противоречит условию теоремы.

Следовательно, существуют  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in M$ , для которых множества  $\frac{1}{2}X + \mathbf{z}_1$  и  $\frac{1}{2}X + \mathbf{z}_2$  имеют непустое пересечение. Поэтому

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}' + \mathbf{z}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{x}'' + \mathbf{z}_2, \quad \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X.$$

Тогда

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{x}'' - \frac{1}{2}\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\mathbf{x}'' + \frac{1}{2}(-\mathbf{x}').$$

Поскольку множество  $X$  центрально симметрично и выпукло, то разность  $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 \in M$  лежит также и в  $X$ .  $\square$

**Теорема 17. (Неравенство Адамара).** Пусть  $\det(\Lambda)$  — детерминант решетки и  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — ее базис. Справедливо неравенство

$$\det(\Lambda) \leq \|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма, т. е.  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — базис решетки. Рассмотрим процедуру ортогонализации базиса:

$$\mathbf{b}_1^* = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2^* = \mathbf{b}_2 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^*)} \mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^* = \mathbf{b}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_k^*)}{(\mathbf{b}_k^*, \mathbf{b}_k^*)} \mathbf{b}_k^*.$$

Выполняются неравенства  $\|\mathbf{b}_k^*\| \leq \|\mathbf{b}_k\|$ . Тогда

$$\det(\Lambda) = \|\mathbf{b}_1^*\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n^*\| \leq \|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\|.$$

$\square$

Из доказательства следует, что неравенство Адамара достигается в том и только в том случае, когда  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — ортогональны. Однако не всякая решетка имеет ортогональный базис. Классическая теорема Эрмита (1850 г.) утверждает, что для каждого  $n$  существует такое число  $c(n)$ , что в любой  $n$ -мерной решетке  $\Lambda$  можно выбрать базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , для которого

$$\|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\| \leq c(n) \cdot \det(\Lambda).$$

Эрмит показал, что можно положить  $c(n) = (4/3)^{n(n-1)/4}$ . Минковский улучшил эту оценку до  $c(n) = 2^n/V_n \sim (2n/e\pi)^{n/2}$ , где  $V_n$  — объем единичного  $n$ -мерного шара. Однако для всех этих оценок неизвестны полиномиальные алгоритмы отыскания соответствующих базисов. Ловас предложил полиномиальный алгоритм отыскания базиса с константой  $c(n) = 2^{n(n-1)/4}$ , получивший название метода приведения базиса.

**Определение 3.2.8.** Пусть  $B_m(0, r)$  — открытый шар радиуса  $r$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $\Lambda$  — решетка. Определим последовательность минимумов  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  формулой

$$\lambda_i(\Lambda) = \inf\{r \mid \dim(\text{span}(\Lambda \cap B_m(0, r))) \geq i\}.$$

**Теорема 18. (Вторая теорема Минковского).** Существуют независимые векторы решетки, для которых выполняется неравенство

$$\|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_n\| \leq \frac{2^n}{V_n} \cdot \det(\Lambda).$$

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  — линейно независимые векторы решетки, для которых достигаются минимальные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и предположим, что  $\prod_{i=1}^n \lambda_i > \frac{2^n}{V_n} \cdot \det(\Lambda)$ . Пусть векторы  $\mathbf{x}_i^*$  получены с помощью процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта. Рассмотрим преобразование

$$T \left( \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i^* \right) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \mathbf{x}_i^* \right).$$

Пусть  $S = B_m(0, 1) \cap \text{span}(\Lambda)$  —  $n$ -мерный шар в  $\text{span}(\Lambda)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{vol}(T(S)) &= \left( \prod_i \lambda_i \right) \text{vol}(S) \\ &> \frac{2^n}{V_n} \cdot \det(\Lambda) \text{vol}(S) \\ &= 2^n \text{vol}(\Lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Минковского 16 в  $T(S)$  имеется ненулевая точка решетки  $\mathbf{y}$ . Следовательно, существует точка  $\mathbf{x} \in S$ , для которой  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Из определения  $S$  следует, что  $\|\mathbf{x}\| < 1$ . Выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i^* \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \mathbf{x}_i^*.\end{aligned}$$

Поскольку  $\mathbf{y} \neq 0$  при некотором  $i$  выполняется неравенство  $c_i \neq 0$ . Пусть  $k$  — максимальное значение индекса, при котором  $c_k \neq 0$  и  $k'$  — минимальное значение индекса, при котором  $\lambda_{k'} = \lambda_k$ . Отметим, что элемент  $\mathbf{y}$  линейно независим от  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k'}$ , поскольку  $(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{y}) = \lambda_k c_k \|\mathbf{x}_k^*\|^2 \neq 0$  и элемент  $\mathbf{x}_k^*$  ортогонален  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k'}$ . Покажем теперь, что  $\|\mathbf{y}\| < \lambda_k$ . Действительно,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}\|^2 &= \left\| \sum_{i \leq k} \lambda_i c_i \mathbf{x}_i^* \right\|^2 \\ &= \sum_{i \leq k} \lambda_i^2 c_i^2 \|\mathbf{x}_i^*\|^2 \\ &\leq \sum_{i \leq k} \lambda_k^2 c_i^2 \|\mathbf{x}_i^*\|^2 \\ &= \lambda_k^2 \left\| \sum_{i \leq k} c_i \mathbf{x}_i^* \right\|^2 \\ &= \lambda_k^2 \|\mathbf{x}\|^2 < \lambda_k^2.\end{aligned}$$

Полученное неравенство противоречит определению  $k'$ -го последовательного минимума  $\lambda_{k'}$ .  $\square$

**Следствие 5.** Для первого минимума  $\lambda_1$  выполняется неравенство

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} \cdot \sqrt[n]{\det(\Lambda)}.$$

Из неравенства  $\frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} < \sqrt{n}$  получаем

**Следствие 6.** Для первого минимума  $\lambda_1$  выполняется неравенство

$$\lambda_1 \leq \sqrt{n} \sqrt[n]{\det(\Lambda)}.$$

### 3.3 Некоторые задачи на решетках

Определение 3.2.8 последовательных минимумов очевидным образом продолжается на произвольные нормы в  $\mathbb{R}^n$ . Тем не менее, если не оговорено противное, норма в  $\mathbb{R}^n$  предполагается евклидовой.

Через  $sh(\Lambda)$  будем обозначать длину кратчайшего ненулевого вектора решетки  $\Lambda$ . Очевидно, что  $sh(\Lambda) = \lambda_1$ . В качестве следствия второй теоремы Минковского выше была получена оценка сверху для кратчайшего вектора решетки вектора

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\sqrt[n]{V_n}} \cdot \sqrt[n]{\det(\Lambda)}.$$

Оценка снизу для кратчайшего вектора решетки дается следующей теоремой.

**Теорема 19.** Пусть  $B$  — базис решетки и  $\mathbf{b}^*$  — соответствующий ортогональный базис, полученный с помощью процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта. Тогда

$$\lambda_1 \geq \min_j \|\mathbf{b}_j^*\| > 0.$$

**Задача.** Докажите эту теорему. **Указание.** Докажите, что для целочисленного вектора  $\mathbf{x}$  выполняется неравенство

$$\|\mathbf{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{b}_i\|, \text{ где } i = \max\{i | x_i \neq 0\}.$$

Всюду далее в вычислительных задачах рассматриваются целочисленные решетки в  $\mathbb{Q}^n$ , поскольку вещественные числа невычислимы.

**Задачи SVP нахождения кратчайшего вектора (Shortest Vector Problem).**

#### 1. Точное решение задачи SVP.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$ .
- **Найти:** ненулевой вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{v}\| = \lambda_1$ .

#### 2. Поиск короткого вектора в решетке. Оценка качества решения

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$ .
- **Найти:** ненулевой вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$  и указать  $\gamma \geq 1$ , для которого  $\|\mathbf{v}\| \leq \gamma \lambda_1$ .

### 3. Поиск $\gamma$ -приближения.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$  и число  $\gamma \geq 1$ .
- **Найти:**  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{v}\| \leq \gamma \lambda_1$ .

## Задачи CVP нахождения б вектора (Closest Vector Problem).

### 1. Точное решение задачи CVP.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$  и вектор  $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}^n$ .
- **Найти:**  $\mathbf{x} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{t} - \mathbf{x}\|$  минимальна.

### 2. Поиск ближайшего вектора в решетке. Оценка качества решения

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$  и вектор  $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}^n$ .
- **Найти:**  $\mathbf{v} \in \Lambda$  и указать  $\gamma \geq 1$ , для которого  $\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\| \leq \gamma \|B\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  при всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$ .

### 3. Поиск $\gamma$ -приближения.

- **Дано:** Базис  $B$  целочисленной решетки  $\Lambda = L(B)$ , вектор  $\mathbf{t}$  и число  $\gamma$ .
- **Найти:**  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , для которого  $\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\| \leq \gamma \|B\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  при всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$ .

При исследовании задач CVP и SVP могут быть поставлены различные вычислительные задачи. Перечислим эти задачи в порядке сложности.

Сначала перечислим вычислительные задачи для точного решения задач CVP и SVP.

- **Задача поиска.** Найти (ненулевой) вектор решетки  $\mathbf{x} \in \Lambda$  минимизирующий величину  $\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|$  (соответственно,  $\|\mathbf{x}\|$ ).
- **Задача оптимизации.** Найти минимум  $\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|$  (соответственно,  $\|\mathbf{x}\|$ ) по всем  $\mathbf{x} \in \Lambda$  (соответственно,  $\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{0\}$ ).
- **Задача распознавания.** По заданному рациональному числу  $r > 0$  определить, существует ли (ненулевой) вектор решетки  $\mathbf{x}$ , для которого  $\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \leq r$  (соответственно,  $\|\mathbf{x}\| \leq r$ ).

Теперь сформулируем подобные вычислительные задачи для поиска  $\gamma$ -приближений задач CVP и SVP.

**Задача поиска приближенного решения.** Найти (ненулевой) вектор  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , такой что  $\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\| \leq \gamma \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  для всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$  ( $\|\mathbf{v}\| \leq \gamma \cdot \|\mathbf{y}\|$  для всех  $\mathbf{y} \in \Lambda \setminus \{0\}$ ).

**Приближенная задача оптимизации.** Найти (ненулевое) число  $d$ , такое что  $\|\mathbf{z} - \mathbf{t}\| \leq d \leq \gamma \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{t}\|$  для всех  $\mathbf{y} \in \Lambda$  при некотором  $\mathbf{z} \in \Lambda$  ( $\lambda_1 \leq d < \gamma \cdot \lambda_1$ ).

Во всех известных в настоящее время полиномиальных приближенных алгоритмах для задач SVP и CVP множитель  $\gamma(n)$  экспоненциален.

Имеется множество вычислительных задач на решетках, которые решаются эффективно. Перечислим некоторые из них.

1. **Задача принадлежности.** Даны базис  $B$  решетки и вектор  $\mathbf{x}$ . Проверить, является ли  $\mathbf{x}$  элементом решетки  $L(B)$ ?
2. **Нахождение ядра.** Дана целочисленная матрица  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ . Найти базис решетки  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{x} = 0\}$ . Аналогичная задача для сравнений по модулю. Даны натуральное число  $M$  и матрица  $A \in \mathbb{Z}_M^{m \times n}$ . Найти базис решетки  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{x} = 0 \pmod{M}\}$ .
3. **Построение базиса.** Задан набор целочисленных векторов. Найти базис решетки, которую они порождают.
4. **Объединение решеток.** Даны две решетки  $L(B_1)$  и  $L(B_2)$  в  $\mathbb{Z}^n$ . Найти минимальную содержащую их решетку.

5. **Построение двойственной решетки.** Дана решетка  $L(B)$ . Построить двойственную решетку, иными словами множество всех векторов  $\mathbf{y}$  в  $Span(L(B))$ , для которых скалярные произведения  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  целочисленны при всех  $\mathbf{x} \in L(B)$ .
6. **Пересечение решеток.** Даны две решетки  $L(B_1)$  и  $L(B_2)$  в  $\mathbb{Z}^n$ . Найти базис пересечения  $L(B_1) \cap L(B_2)$ .
7. **Задача эквивалентности решеток.** Даны две решетки  $L(B_1)$  и  $L(B_2)$  в  $\mathbb{Z}^n$ . Проверить равенство  $L(B_1) = L(B_2)$ .
8. **Проверка цикличности решетки.** Дана решетка  $L(C)$ . Проверить, что решетка циклична, т.е. при циклической перестановке ее элементов снова получаются элементы этой же решетки.

## 3.4 Алгоритм Гаусса. Приближенные алгоритмы. Алгоритм Ловаса

Вопрос о нахождении короткого вектора в решетке был сформулирован еще Дирихле в 1842 г. в форме проблемы о совместных диофантовых приближениях. Теорема Минковского о выпуклом центрально симметричном теле (1896 г.) дает оценку длины кратчайшего ненулевого вектора вида  $sh(\Lambda) \leq c\sqrt{n}(\det(\Lambda))^{1/n}$ ,  $\det(\Lambda)$  — детерминант решетки  $\Lambda$ . Доказательства теорем Дирихле и Минковского являются неконструктивными и не дают никаких способов построения коротких векторов в решетке.

Цель настоящей лекции — рассказать об LLL-алгоритме (Lenstra A., Lenstra H., Lovasz L.) нахождения в произвольной целочисленной решетке  $\Lambda$  приведенного базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  этой решетки, для которого выполняется неравенство

$$\|\mathbf{b}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{b}_m\| \leq 2^{n(n-1)/4} \det(\Lambda)$$

Кратчайший вектор приведенного базиса позволяет получить верхнюю оценку длины короткого ненулевого вектора вида

$$sh(\Lambda) \leq 2^{(n-1)/4} (\det(\Lambda))^{1/n}.$$



В качестве следствия из него получается алгоритм нахождения в произвольной решетке  $\Lambda$  вектора длины не более  $2^{(n-1)/4} sh(L)$ .

К настоящему времени сложностной статус задачи поиска кратчайшего вектора решетки установлен в смысле доказательства ее  $\mathcal{NP}$ -полноты. Не совсем ясно обстоит дело с эффективными приближенными алгоритмами. Более исследована родственная задача CVP нахождения для заданной решетки и вектора  $\mathbf{a}$  ближайшего к нему вектора решетки  $\mathbf{b}$ , т. е. минимизирующего  $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ . Ее  $\mathcal{NP}$ -полнота была доказана еще в 1981 г.

### 3.4.1 Алгоритм Гаусса

Вначале исследуем двумерные решетки.

**Определение 3.4.1.** Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — базис решетки. Этот базис называется приведенным относительно нормы  $\|\cdot\|$ , если выполняются неравенства

$$\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|, \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

**Лемма 24.** Рассмотрим три точки на прямой:  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  и  $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ , где  $\alpha \in (1, \infty)$ . Для любой нормы  $\|\cdot\|$  из неравенства  $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  следует, что  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|$ , а из неравенства  $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  следует, что  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|$ .

*Доказательство.* Доказательство леммы проведем для строгого неравенства. Доказательство в случае нестрогого неравенства аналогично. Положим  $\delta = 1/\alpha$ . Тогда

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1 - \delta)\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}).$$

Тогда согласно неравенству треугольника имеем

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq (1 - \delta)\|\mathbf{x}\| + \delta\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|.$$

Поскольку при  $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  выполняется неравенство

$$(1 - \delta)\|\mathbf{x}\| + \delta\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\| < (1 - \delta)\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| + \delta\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|,$$

то, комбинируя полученные неравенства, получаем

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| < (1 - \delta)\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| + \delta\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|.$$

Преобразуя последнее неравенство, получаем

$$\delta\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| < \delta\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|.$$

Поскольку  $\delta > 0$ , из полученного неравенства следует, что  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|$ .  $\square$

Следующая теорема дает простой критерий минимальности базиса.

**Теорема 20.** Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — базис решетки и  $\lambda_1, \lambda_2$  последовательные минимумы решетки. Тогда базис  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  приведен в том и только том случае, если нормы векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равны значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно.

*Доказательство. Достаточность.* Пусть  $\|\mathbf{a}\| = \lambda_1$  и  $\|\mathbf{b}\| = \lambda_2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b}\|$ . Пусть базис не является приведенным. Тогда выполняется одно из двух неравенств  $\|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|$ . Тогда для одного из базисов  $(\mathbf{a}, \mathbf{a} \pm \mathbf{b})$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\| < \lambda_2$ , противоречащее определению последовательных минимумов решетки.

*Необходимость.* Пусть базис приведен. Без ограничения общности можно считать, что  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b}\|$ . Требуется доказать, что  $\|\mathbf{a}\| = \lambda_1$  и  $\|\mathbf{b}\| = \lambda_2$ . Пусть  $r, s \in \mathbb{Z}$ . Покажем, что выполняются соотношения

$$\|\mathbf{a}\| \leq \|r\mathbf{a} + s\mathbf{b}\| \text{ если } (r, s) \neq (0, 0) \quad (3.1)$$

и

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|r\mathbf{a} + s\mathbf{b}\| \text{ если } s \neq 0, \quad (3.2)$$

из которых следует утверждение теоремы.

Если  $r$  или  $s$  равно нулю, то неравенства очевидны.

Рассмотрим случай, когда  $rs \neq 0$ . Разберем случай  $r \geq s > 0$ , остальные аналогичны. Поскольку  $s \geq 1$  имеем

$$\|(r/s)\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \left\| \frac{r\mathbf{a} + s\mathbf{b}}{s} \right\| \leq \|r\mathbf{a} + s\mathbf{b}\|.$$

Применяя теперь лемму 24 к трем точкам  $\mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{a}$  и  $\mathbf{b} + (r/s)\mathbf{a}$ , получим

$$\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{b} + \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} + (r/s)\mathbf{a}\| \leq \|r\mathbf{a} + s\mathbf{b}\|.$$

$\square$

**Определение 3.4.2.** *Базис называется  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  вполне упорядоченным, если выполняются неравенства  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|$ .*

Пусть  $\mathcal{O}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  — оракул, решения задачи:

$$\text{найти } \mu \in \mathbb{Z} \mid \|\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - \mu'\mathbf{a}\| \forall \mu' \in \mathbb{Z}.$$

**Обобщенный алгоритм Гаусса построения минимального базиса решетки:**

**Вход:** базис  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  двумерной решетки  $\Lambda$  на плоскости.

**Выход:** минимальный базис  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  двумерной решетки  $\Lambda$  на плоскости.

**if**  $\|\mathbf{a}\| > \|\mathbf{b}\|$  **then**  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (\mathbf{b}, \mathbf{a})$

**if**  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| > \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$  **then**  $\mathbf{b} := -\mathbf{b}$

**if**  $\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$  **then return**  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

**if**  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$  **then go to**  $(loop)$

**if**  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$  **then return**  $(\mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{b})$

**let**  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b})$

(начало цикла)

$loop : \mu =: \mathcal{O}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mu\mathbf{a},)$

**if**  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| > \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$  **then let**  $\mathbf{b} := -\mathbf{b}$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (\mathbf{b}, \mathbf{a})$

**if**  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  *приведенный базис* **then return**  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  **else go to**  $loop$

(конец цикла)

Отметим, что при первом обращении к циклу ( $loop$ ) базис всегда вполне упорядочен. Необходимо убедиться, что после окончания каждого цикла базис остается вполне упорядоченным или получаем приведенный базис и алгоритм завершается).

Сначала опишем эффективную процедуру нахождения значения  $\mu = \mathcal{O}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

**Лемма 25.** Пусть  $\|\cdot\|$  — евклидова норма и векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  таковы, что  $\|\mathbf{b}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ . Тогда оракул  $\mathcal{O}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  реализуется эффективно. Более того, число  $\mu$  удовлетворяет неравенству  $1 \leq \mu \leq \lceil 2\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{a}\| \rceil$ .

*Доказательство.* Положим  $c = \lceil 2\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{a}\| \rceil$ . Тогда согласно неравенству треугольника

$$\|\mathbf{b} - c\mathbf{a}\| \geq c\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{b}\|,$$

и, следовательно, по лемме 24 для  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{y} = -c\mathbf{a}$  и  $\alpha = \frac{c+1}{c}$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{b} - c\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - (c+1)\mathbf{a}\|$ . Тогда по лемме 24 для всех  $\alpha > 1$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{b} - (c+1)\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - \alpha(c+1)\mathbf{a}\|$ . Следовательно  $\mu \leq c$ . Заметим, что согласно условию леммы последнее неравенство не выполняется при  $c = 0$ . Используя процедуру бинарного поиска, находим эффективно на отрезке  $[1, c]$  такое целое число  $\mu$ , являющееся локальным минимумом для функции  $\|\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}\|$ , для которого

$$\|\mathbf{b} - (\mu - 1)\mathbf{a}\| > \|\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - (\mu + 1)\mathbf{a}\|.$$

Тогда по лемме 24 для всех  $k \geq \mu + 1$  выполняются неравенства

$$\|\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - (\mu + 1)\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - k\mathbf{a}\|.$$

Аналогично, при  $k \leq \mu - 1$  выполняются неравенства

$$\|\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b} - (\mu - 1)\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - k\mathbf{a}\|.$$

Поскольку  $\mu \in [1, c]$ , выполняется неравенство  $1 \leq \mu \leq c = \lceil 2\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{a}\| \rceil$ .  $\square$

**Лемма 26.** В начале каждой итерации цикла loop в алгоритме Гаусса базис  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  вполне упорядочен.

*Доказательство.* Для первой итерации цикла loop утверждение очевидно.

Докажем, что если на вход  $k$ -й итерации цикла loop подается вполне упорядоченный базис, то выходом этой итерации цикла будет приведенный или вполне упорядоченный базис.

В результате выполнения всех операций цикла loop, за исключением последней команды, получаем число  $\mu$  и два базисных вектора  $\mathbf{a}' = \varepsilon(\mathbf{b} - \mu\mathbf{a})$  и  $\mathbf{b}' = \mathbf{a}$ , где знак  $\varepsilon = \pm 1$  определяется третьей строкой цикла loop. В любом случае выполняется неравенство  $\|\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\| \leq \|\mathbf{a}' + \mathbf{b}'\|$ . Далее согласно определению  $\mu$  выполняются соотношения

$$\|\mathbf{a}' + \mathbf{b}'\| \geq \|\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\| = \|\varepsilon(\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}) - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{b} - (\mu \pm 1)\mathbf{a}\| \geq \|\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}'\|.$$

Если  $\|\mathbf{b}'\| \leq \|\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\|$ , то базис  $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$  приведен. В противном случае  $\|\mathbf{b}'\| > \|\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\| \geq \|\mathbf{a}'\|$  и базис  $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$  вполне упорядочен.  $\square$

**Теорема 21.** Алгоритм Гаусса заканчивает работу за конечное число шагов. Число итераций в алгоритме Гаусса для базиса  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  не превосходит  $2 + \log_2(\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)$ .

*Доказательство.* Алгоритм Гаусса преобразует базис решетки в базис той же решетки. По выполнении цикла "loop" для базиса  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , согласно лемме 26, получаем либо приведенный базис, что завершает алгоритм Гаусса, либо снова вполне упорядоченный базис  $[\varepsilon(\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}), \mathbf{a}]$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Если базис  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  вполне упорядочен, выполняется неравенство  $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\|$ . Тогда по условию на  $\mu$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\|$ . Следовательно, после каждой такой итерации вектор  $\mathbf{b}$  заменяется вектором  $\mathbf{b}'$  строго меньшей длины. Следовательно, полученные после выполнения итерации цикла loop базисы не повторяются и длины векторов базиса не увеличиваются. Поэтому из дискретности решетки следует, что алгоритм закончит работу за конечное число итераций.

Оценка для числа итераций получается из леммы 27  $\square$

Пусть  $k$  — число итераций в алгоритме Гаусса и  $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1})$  вполне упорядоченный базис в начале первой итерации. Представим результаты итераций цикла loop в виде последовательности базисов

$$(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}), (\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k), \dots, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2),$$

причем  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  — приведенный базис. Тогда справедлива следующая

**Лемма 27.** При  $i \geq 3$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{a}_{i-1}\| < \frac{1}{2}\|\mathbf{a}_i\|$ .

*Доказательство.* Рассмотрим тройки векторов  $(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ . Тогда выполняются неравенства  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{c}\|$  и при некотором целом  $\mu \geq 1$  и  $\varepsilon = \pm 1$  выполняется равенство  $\mathbf{a} = \varepsilon(\mathbf{c} - \mu\mathbf{b})$ . Тогда  $\mathbf{c} = \varepsilon\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ . Докажем, что  $\|\mathbf{c}\| > 2\|\mathbf{b}\|$ .

- Пусть  $\mu = 1$ . Тогда выполняется неравенство  $\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{c}\|$ , противоречащее вполне упорядоченности базиса  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ . Следовательно  $\mu \neq 1$ .
- Пусть  $\varepsilon = -1, \mu = 2$ . Тогда  $\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|$ . Поскольку базис  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  вполне упорядочен, выполняется неравенство  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|$  и, следовательно,  $\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{c}\|$ , что противоречит упорядоченности базиса  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ .
- Пусть  $\varepsilon = -1, \mu > 2$ . Тогда, учитывая неравенство  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\|$ , получим

$$\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\| \geq \mu\|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{a}\| > \mu\|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{b}\| = (\mu - 1)\|\mathbf{b}\| \geq 2\|\mathbf{b}\|.$$

- Пусть  $\varepsilon = 1, \mu \geq 2$ . Поскольку базис  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  вполне упорядочен, выполняется неравенство  $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\|$ . Тогда, по лемме 24, выполняется неравенство  $\|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{b} + \mathbf{a}\|$ , а поскольку базис  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  вполне упорядочен выполняется неравенство  $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ . Поэтому  $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b} + \mathbf{a}\|$ , и, следовательно, используя лемму 24, получим

$$\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\|.$$

Итак, доказано неравенство  $\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\| \geq \|2\mathbf{b} + \mathbf{a}\|$ . Для доказательства леммы достаточно проверить выполнение неравенства  $\|2\mathbf{b} + \mathbf{a}\| > 2\|\mathbf{b}\|$ .

Используя неравенство  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|$  (базис  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  вполне упорядочен), из неравенства треугольника получаем

$$\|2\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\| = 2\|\mathbf{b}\|.$$

Воспользовавшись леммой 24, получаем

$$\|2\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < \|2\mathbf{b}\| = \|2\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{a}\| < \|2\mathbf{b} - \mathbf{a} + 2\mathbf{a}\| = \|2\mathbf{b} + \mathbf{a}\|.$$

□

Воспользовавшись леммой 27, получаем, что при  $i \geq 3$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{a}_i\| \geq 2^{i-3}\|\mathbf{a}_3\|$ . В частности, для любых базисных векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  выполняется неравенство

$$2^{k-2} \leq 2^{k-2}\|\mathbf{a}_3\| \leq \|\mathbf{a}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

Следовательно,  $k \leq 2 + \log_2(\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)$ .

Полученное неравенство доказывает теорему 21.

### 3.4.2 LLL-алгоритм

Вначале напомним процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  — базис. Тогда ортогональные векторы  $\mathbf{b}_i^*$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^* &= \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j} \mathbf{b}_j^* \\ \mu_{i,j} &= \frac{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^*)}{(\mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^*)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

**Определение 3.4.3.** Базис  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  называется  $\delta$ LLL-приведенным относительно параметра  $\frac{1}{4} < \delta < 1$ , если

1.  $|\mu_{ij}| \leq 1/2$  при  $i > j$ , где  $\mu_{ij}$  — коэффициенты Грамма-Шмидта,
2. для любой пары векторов базиса  $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$  выполняется неравенство

$$\delta \|\pi_i(\mathbf{b}_i)\|^2 \leq \|\pi_i(\mathbf{b}_{i+1})\|^2,$$

где  $\pi_i$  — проекция на оболочку  $\text{span}(\mathbf{b}_i^*, \mathbf{b}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{b}_n^*)$ .

Условие 2 определения 3.4.3 эквивалентно выполнению соотношения

$$\delta \|\mathbf{b}_i^*\|^2 \leq \|\mathbf{b}_{i+1}^* + \mu_{i+1,i} \mathbf{b}_i^*\|^2 = \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 + \mu_{i+1,i}^2 \|\mathbf{b}_i^*\|^2.$$

При  $\delta = 1$  получаем, что при  $i = 1, \dots, n-1$  двумерные базисы  $(\pi_i(\mathbf{b}_i), \pi_i(\mathbf{b}_{i+1}))$  приведенные.

**Теорема 22.** Пусть  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  —  $\delta LLL$ -приведенный базис решетки  $L$ . Тогда

1.  $\det L \leq \prod_{i=1}^n \|\mathbf{b}_i\| \leq \left(\frac{4}{4\delta-1}\right)^{n(n-1)/4} \det L$ ,
2.  $\|\mathbf{b}_j\| \leq \left(\frac{4}{4\delta-1}\right)^{(i-1)/2} \|\mathbf{b}_i^*\|$  при  $1 \leq j \leq i \leq n$ ,
3.  $\|\mathbf{b}_1\| \leq \left(\frac{4}{4\delta-1}\right)^{(n-1)/4} (\det L)^{1/n}$ ,
4. если  $\mathbf{x} \neq 0$  — элемент решетки, то  $\|\mathbf{b}_1\| \leq \left(\frac{4}{4\delta-1}\right)^{(n-1)/2} \|\mathbf{x}\|$ ,
5. если векторы решетки  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t$  — линейно независимы, то  $\|\mathbf{b}_j\| \leq \left(\frac{4}{4\delta-1}\right)^{(n-1)/2} \max\{\|\mathbf{x}_1\|, \dots, \|\mathbf{x}_t\|\}$  при  $1 \leq j \leq t$ .

*Доказательство.* Согласно определению приведенного базиса выполняется неравенство

$$\|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 \geq (\delta - \mu_{i+1,i}^2) \|\mathbf{b}_i^*\|^2 \geq \left(\delta - \frac{1}{4}\right) \|\mathbf{b}_i^*\|^2$$

для всех  $1 \leq i < n$ . Следовательно, для всех  $1 \leq j \leq i < n$  выполняются неравенства  $\|\mathbf{b}_j^*\|^2 \leq \left(\frac{4}{4\delta-1}\right)^{i-j} \|\mathbf{b}_i^*\|^2$ . Введем обозначение  $\tau = \frac{4}{4\delta-1}$ . Тогда ввиду ограничения на параметр  $\delta$ , получаем, что  $\tau > \frac{4}{3}$ . Поэтому из условия приведенности базиса

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}_{i+1}\|^2 &= \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 + \sum_{j=1}^i \mu_{i+1,j} \|\mathbf{b}_j^*\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 + \sum_{j=1}^i \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4\delta-1}\right)^{i+1-j} \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 \\ &= \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 + \sum_{j=1}^i \frac{1}{4} \cdot \tau^{i+1-j} \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{4} \tau \frac{\tau^i - 1}{\tau - 1}\right) \cdot \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2 \\ &\leq \tau^i \cdot \|\mathbf{b}_{i+1}^*\|^2, \end{aligned}$$

т.к.  $\left(1 + \frac{1}{4} \tau \frac{\tau^i - 1}{\tau - 1}\right) \leq \tau^i$  при  $\tau > \frac{4}{3}$ .



Следовательно,

$$\|\mathbf{b}_j\|^2 \leq \tau^{j-1} \|\mathbf{b}_j^*\|^2 \leq \tau^{i-1} \|\mathbf{b}_i^*\|^2$$

при  $1 \leq j \leq i \leq n$ . Формула 2 теоремы доказана.

Из полученного неравенства выводим

$$\prod_{i=1}^n \|\mathbf{b}_i\|^2 \leq \prod_{i=1}^n \tau^{i-1} \prod_{i=1}^n \|\mathbf{b}_i^*\|^2 = \tau^{n(n-1)/2} \cdot (\det L)^2.$$

Поскольку первая половина неравенства 1 представляет собой, доказанное ранее неравенство Адамара (теорема 17), соотношение 1 доказано.

Для доказательства соотношения 3 воспользуемся соотношениями 2. Перемножая соотношения

$$\|\mathbf{b}_1\| \leq \tau^{\frac{i-1}{2}} \|\mathbf{b}_i^*\|,$$

получим

$$\|\mathbf{b}_1\|^n \leq \prod_{i=1}^n \left( \tau^{\frac{i-1}{2}} \|\mathbf{b}_i^*\| \right) = \tau^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot \det L.$$

Соотношение 3 доказано.

Докажем соотношение 4. Поскольку  $\mathbf{x}$  — вектор решетки, имеют место разложения

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^n r'_i \mathbf{b}_i^*,$$

причем все  $r_k \in \mathbb{Z}$ . Пусть  $k$  — максимальное целое, для которого  $r_k \neq 0$ . Тогда из определения процесса ортогонализации следует, что выполняется равенство  $r_k = r'_k$ , и в частности  $\|r_k\| = \|r'_k\| \geq 1$ . Воспользовавшись соотношением 2, получаем

$$\tau^{n-1} \|\mathbf{x}\|^2 \geq \tau^{n-1} \|r'_k\|^2 \|\mathbf{b}_k^*\|^2 \geq \tau^{k-1} \|\mathbf{b}_k^*\|^2 \geq \|\mathbf{b}_1\|^2.$$

Соотношение 4 доказано.

Докажем соотношение 5. Выразим векторы  $\mathbf{x}_j$  через элементы базиса  $\mathbf{b}_i$

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n r_{i,j} \mathbf{b}_i, \quad r_{i,j} \in \mathbb{Z}.$$

Для каждого  $j$  обозначим через  $k(j)$  наибольшее целое число  $k$ , для которого  $r_{k,j} \neq 0$ . Перенумеруем векторы  $\mathbf{x}_j$  так, чтобы  $k(1) \leq k(2) \leq \dots \leq k(t)$ . Тогда для всех  $1 \leq j \leq t$  выполняются неравенства  $\|\mathbf{x}_j\|^2 \geq \|\mathbf{b}_{k(j)}^*\|^2$ . Выполняется неравенство  $j \leq k(j)$  для всех  $1 \leq j \leq t$ , поскольку векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t$  линейно независимы. Воспользовавшись этим неравенством и уже доказанным соотношением 2, получаем

$$\|\mathbf{b}_j\|^2 \leq \tau^{k(j)-1} \cdot \|\mathbf{b}_{k(j)}^*\|^2 \leq \tau^{n-1} \cdot \|\mathbf{b}_{k(j)}^*\|^2 \leq \tau^{n-1} \cdot \|\mathbf{x}_j\|^2.$$

□

Из утверждения 4 теоремы 22 получаем

**Следствие 7.** Если  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  —  $\delta$ LLL-приведенный базис с  $\delta \in (1/4, 1)$ , то  $\|\mathbf{b}_1\| \leq (2/\sqrt{4\delta-1})^{n-1} \lambda_1$ . В частности, если  $\delta = 1/4 + (3/4)^{n/(n-1)}$ , то  $\|\mathbf{b}_1\| \leq (2/\sqrt{3})^n \lambda_1$ .

### LLL-алгоритм.

Вход: Базис решетки  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  и число  $\frac{1}{4} < \delta < 1$

Выход:  $\delta$ LLL-приведенный базис решетки.

```

for  $i = 1, \dots, n$ 
  for  $j = i - 1, \dots, 1$ 
     $\mathbf{b}_i := \mathbf{b}_i - c_{i,j} \mathbf{b}_j$  где  $c_{i,j} = \lfloor (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^*) / (\mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^*) \rfloor$ 
  if  $\delta \|\pi_i(\mathbf{b}_i)\|^2 > \|\pi_i(\mathbf{b}_{i+1})\|^2$  для некоторого  $i$ 
    then swap( $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ ) go to loop
  else  $B$  — выход

```

Отметим, что после выполнения цикла по  $j$  при заданном  $i$  для всех пар  $i > j$  выполняются соотношения  $|\mu_{i,j}| \leq 1/2$ , а выполняемые в алгоритме преобразования переводят базис решетки в базис той же решетки, причем, если алгоритм заканчивает работу, то в результате получается приведенный базис решетки.

Из определения процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта следует

**Лемма 28.** Пусть  $j < i$ . При преобразовании базиса решетки

$$\varphi_{i,j} : B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \rightarrow B' = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n),$$

по формуле

$$\varphi_{i,j}(\mathbf{b}_k) = \begin{cases} \mathbf{b}_k & \text{при } k \neq i \\ \mathbf{b}_k - c_{k,j}\mathbf{b}_j & \text{при } k = i \end{cases},$$

где  $c_{k,j} = \lfloor (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j^*) / (\mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^*) \rfloor$ , ортогональный базис Грамма-Шмидта нового базиса не изменяется.

Из определения коэффициентов  $c_{k,j} = \lfloor (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j^*) / (\mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^*) \rfloor$  и процедуры ортогонализации Грамма-Шмидта получаем

**Лемма 29.** Пусть  $j < i$ . При преобразовании базиса решетки

$$\varphi_{i,j} : B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \rightarrow B' = (\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n),$$

заданном формулой

$$\varphi_{i,j}(\mathbf{b}_k) = \begin{cases} \mathbf{b}_k & \text{при } k \neq i \\ \mathbf{b}_k - c_{k,j}\mathbf{b}_j & \text{при } k = i \end{cases},$$

где  $c_{k,j} = \lfloor (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j^*) / (\mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^*) \rfloor$ , для всех  $k > m$  выполняются соотношения

$$\mu'_{k,m} = \begin{cases} \mu_{k,m} & \text{при } k \neq i \\ \mu_{k,m} & \text{при } k = i, m \neq j \end{cases}$$

и  $|\mu_{i,j}| \leq 1/2$ .

Из лемм 28 и 29 следует, что каждый раз после выполнения цикла loop новый базис удовлетворяет условию 1 определения 3.4.3 приведенности базиса. Поэтому, для доказательства корректности, остается проверить, что алгоритм останавливается через конечное число циклов, а тогда выполняется условие 2 определения 3.4.3.

Докажем, что алгоритм не только останавливается через конечное число шагов, а даже выполняется за полиномиальное от длины входа время. Чтобы доказать полиномиальность алгоритма, необходимо оценить число циклов loop и сложность выполнения каждого цикла. Для этого потребуются несколько новых определений.

Зададим целозначные положительные функции  $d_i$  на базисах решетки формулами

$$d_i(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i) = \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) \end{array} \right|.$$

Очевидно,  $d_i(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i)$  совпадают с квадратами детерминантов решеток  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i$  и, следовательно, выполняются равенства

$$d_i(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i) = \prod_{j=1}^i \|\mathbf{b}_j^*\|^2.$$

В силу п.3 теоремы 22 такая решетка содержит ненулевой вектор  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющий неравенству

$$\|\mathbf{x}\|^2 \leq \left( \frac{4}{4\delta - 1} \right)^{(i-1)/2} d_i^{1/i}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i).$$

Свяжем теперь с базисом  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  натуральное число

$$D = D(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \prod_{j=1}^n d_j(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_j).$$

Заметим, что если в процессе выполнения алгоритма не выполняется перестановка векторов, то величины  $d_i$ , являющиеся квадратами детерминантов базисов соответствующих решеток не изменяются. Следовательно, и величина  $D$  в этом случае остается неизменной.

Рассмотрим теперь шаг алгоритма, на котором выполняется перестановка двух соседних элементов базиса. А именно, пусть векторы  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i$  определяют приведенный базис в решетке  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i)$ , порожденной этими векторами. Пусть также векторы  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$  представляют базис, для которого выполняется условие 1, но не выполняется условие 2 определения 3.4.3  $\delta$ LLL-приведенности. Тогда согласно LLL-алгоритму выполняется перестановка векторов  $\mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{b}_{i+1}$ , т. е. выполняется переход к базису  $\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n$ , в котором

$$\tilde{\mathbf{b}}_k = \begin{cases} \mathbf{b}_k & \text{при } k \neq i, k \neq i + 1 \\ \mathbf{b}_{k+1} & \text{при } k = i \\ \mathbf{b}_{k-1} & \text{при } k = i + 1 \end{cases}$$

Посмотрим, как изменится при этом значение величины  $D$ . Отметим, что значения  $d_k$  при  $k \neq i$  остаются неизменными, поскольку соответствующие решетки не меняются. Изменяется только решетка, образованная первыми  $i$  элементами базиса. Запишем соответствующее преобразование базиса

$$(\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_i) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}).$$

Тогда

$$\frac{D(\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n)}{D(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)} = \frac{d_i(\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_i)}{d_i(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i)} = \frac{\left( \prod_{j=1}^{i-1} \|\mathbf{b}_j^*\|^2 \right) \|\pi_i(\mathbf{b}_{i+1})\|^2}{\prod_{j=1}^i \|\mathbf{b}_j^*\|^2} = \frac{\|\pi_i(\mathbf{b}_{i+1})\|^2}{\|\mathbf{b}_i^*\|^2}.$$

Поскольку  $\frac{\|\pi_i(\mathbf{b}_{i+1})\|^2}{\|\mathbf{b}_i^*\|^2} = \frac{\|\pi_i(\mathbf{b}_{i+1})\|^2}{\|\pi_i(\mathbf{b}_i)\|^2} \leq \delta$ , выполняется неравенство

$$D(\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n) \leq \delta D(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n). \quad (3.4)$$

Пусть  $D_0 = D(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  — значение целозначной функции  $D$  на исходном базисе решетки на входе LLL-алгоритма, а  $D_k$  — соответствующее значение после  $k$ -й итерации (loop). Тогда из формулы 3.4 следует соотношение  $D_k \leq \delta^k D_0$ . Поскольку  $D$  — целозначная положительная функция и  $\delta < 1$ , выполняется неравенство

$$k \leq \frac{\log D_0}{\log(1/\delta)}.$$

Поскольку  $D_0$  вычислима за полиномиальное время от длины входа, значение  $\log D_0$  полиномиально от длины входа. Следовательно, если  $\delta < 1$  — константа, то число итераций полиномиально от длины входа.

Следующая лемма показывает, что для некоторой возрастающей функции  $\delta_n$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 1$ , число итераций остается полиномиальным.

**Лемма 30.** Если  $\delta_n = (1/4) + (3/4)^{n/(n-1)}$ , то для всех  $c > 1$  существует такое  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $(\log(1/\delta_n))^{-1} \leq n^c$ .

*Доказательство.* Неравенство  $(\log(1/\delta_n))^{-1} \leq n^c$  эквивалентно неравенству  $1 - 2^{-\left(\frac{1}{n}\right)^c} \leq 1 - \delta_n$ . Согласно определению  $\delta_n$  выполняется равенство

$$1 - \delta_n = (3/4) - (3/4)^{n/(n-1)} = (3/4)(1 - (3/4)^{1/(n-1)}).$$

Следовательно, доказываемое неравенство эквивалентно соотношению

$$\frac{1 - 2^{-\left(\frac{1}{n}\right)^c}}{(3/4)(1 - (3/4)^{1/(n-1)})} \leq 1. \quad (3.5)$$

Чтобы доказать соотношение 3.5, достаточно проверить, что выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-\left(\frac{1}{n}\right)^c}}{(3/4)(1 - (3/4)^{1/(n-1)})} = 0. \quad (3.6)$$

Сделаем замену переменных  $x = 1/(n-1)$ . Тогда подставляя  $n = 1 + 1/x$  в соотношение 3.6, получим эквивалентное равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{-\left(\frac{x}{x+1}\right)^c}}{(3/4)(1 - (3/4)^x)} = 0.$$

Для вычисления предела воспользуемся правилом Лопиталья. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{-\left(\frac{x}{x+1}\right)^c}}{(3/4)(1 - (3/4)^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-\left(\frac{x}{x+1}\right)^c} \frac{c \ln 2}{(1+x)^2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{c-1}}{\frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln(4/3)} = 0.$$

□

Теперь из следствия 7 и леммы 30 получаем, что LLL-алгоритм находит приближение кратчайшего вектора с точностью до множителя  $(2\sqrt{3})^n$  за полиномиальное от длины входа число итераций.

Число арифметических операций, выполняемых в каждом цикле полиномиально. Поэтому, чтобы получить полиномиальную оценку времени выполнения алгоритма, достаточно проверить, что размеры чисел в процессе выполнения алгоритма полиномиальны относительно длины входа. Поскольку при выполнении LLL-алгоритма операции производятся над рациональными числами, достаточно проверить полиномиальность размеров их числителей и знаменателей.

Из формул 3.3 ортогонализации Грамма-Шмидта следует, что  $\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_i^* \in \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1})$ , т.е.

$$\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} v_{i,j} \mathbf{b}_j \quad (3.7)$$

для некоторых вещественных  $v_{i,j}$ . Для любого  $t < i$  выполняется равенство

$$(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_t) = \sum_{j=1}^{i-1} v_{i,j} (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_t). \quad (3.8)$$

Составим матрицу  $B_t = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_t)$  из столбцов и вектор-столбец  $\mathbf{v}_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,i-1})'$ . Объединяя уравнения 3.8 при  $t = 1, \dots, i-1$ , получим систему линейных уравнений

$$\mathbf{b}_i' B_{i-1} = \mathbf{v}_i' B_{i-1}' B_{i-1}.$$

Детерминант системы равен  $\det(B_{i-1}' B_{i-1}) = d_{i-1}$ . Согласно правилу Крамера компоненты вектора  $d_{i-1} \mathbf{v}_i$  целые числа. Поскольку из равенства 3.7 следует

$$d_{i-1} \mathbf{b}_i^* = d_{i-1} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1} (d_{i-1} v_{i,j}) \mathbf{b}_j, \quad (3.9)$$

знаменатели рациональных векторов  $\mathbf{b}_i^*$  являются делителями целых чисел  $d_{i-1}$ . Вычислим теперь коэффициенты в процедуре ортогонализации

$$\mu_{i,j} = \frac{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^*)}{(\mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^*)} = \frac{d_{j-1} (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^*)}{d_{j-1} \|\mathbf{b}_j^*\|^2} = \frac{(\mathbf{b}_i, d_{j-1} \mathbf{b}_j^*)}{d_j},$$

поскольку  $d_j = \prod_{k=1}^j \|\mathbf{b}_k^*\|^2$ . Ранее было показано, что размер представления

начального значения  $D_0$  целозначной функции  $D = \prod_{i=1}^n d_i$  полиномиален относительно длины входа и эта величина уменьшается в процессе выполнения LLL -алгоритма. Поэтому знаменатели всех рациональных чисел в процессе выполнения алгоритма имеют полиномиальный размер относительно длины входа.

Осталось проверить полиномиальность размеров числителей всех дробей в процессе выполнения алгоритма. Докажем ограниченность норм всех векторов при выполнении алгоритма. Согласно определению выполняются соотношения  $\mu_{i,j} \leq 1/2$ . Отметим, что при  $i > 1$  из целочисленности вектора  $d_i \mathbf{b}_i^*$  (см. соотношение 3.9) следует, что  $\|\mathbf{b}_i^*\| \geq 1/d_i$ . Также выполняются соотношения  $\|\mathbf{b}_1^*\| = \|\mathbf{b}_1\| \geq 1$  и  $d_i = \prod_{j=1}^i \|\mathbf{b}_j^*\|^2$ . Следовательно,

$$\|\mathbf{b}_i^*\|^2 = \frac{d_i}{\prod_{j=1}^{i-1} \|\mathbf{b}_j^*\|^2} \leq d_i \prod_{j=1}^{i-2} d_j^2 \leq D.$$

Поэтому

$$\|\mathbf{b}_i\|^2 = \|\mathbf{b}_i^*\|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j}^2 \|\mathbf{b}_j^*\|^2 \leq D + (n/4)D \leq nD.$$

Следовательно, длины числителей также полиномиальны. Следовательно,  $\delta_n$ LLL-алгоритм с  $\delta_n = (1/4) + (3/4)^{n/(n-1)}$  выполняется за полиномиальное время от длины входа.

Таким образом доказана

**Теорема 23.** *Существует полиномиальный алгоритм, находящий для базиса  $B$  решетки  $\delta_n$ LLL-приведенный базис решетки  $\mathcal{L}(B)$  с параметром  $\delta_n = (1/4) + (3/4)^{n/(n-1)}$ .*

Теперь из леммы 30 следует

**Теорема 24.** *Существует полиномиальный алгоритм, находящий для базиса  $B$  решетки ненулевой вектор решетки  $x \in \mathcal{L}(B)$  длины не более чем  $(2/\sqrt{3})^n \lambda_1$ .*

### 3.4.3 Аппроксимация решения задачи CVP: задача ACVS

**Задача ACVP (Approximate CVP).** Пусть заданы вектор  $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$  и  $n$ -мерная решетка с базисом  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , ( $n \leq m$ ). Требуется найти вектор  $\mathbf{b}_0 \in$



$L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , для которого выполнено соотношение

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0\| \leq 2(2/\sqrt{3})^n \min_{\mathbf{x} \in L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)} \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|.$$

Поставленная задача решается следующим алгоритмом

### АСVP-алгоритм.

Вход: Базис решетки  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  и вектор  $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}^m$

Выход: Вектор  $\mathbf{x}$  решетки  $L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , для которого выполняется соотношение

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \leq 2(2/\sqrt{3})^n \min_{\mathbf{y} \in L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)} \|\mathbf{y} - \mathbf{t}\|.$$

**Применить  $\delta$ LLL-алгоритм к базису  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$**

**$\mathbf{b} := \mathbf{t}$**

**for  $j = n, \dots, 1$**

**$c_j = \lfloor (\mathbf{b}, \mathbf{b}_j) / (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j) \rfloor$**

**$\mathbf{b} := \mathbf{b} - c_j \mathbf{b}_j$**

**$\mathbf{x} := \mathbf{t} - \mathbf{b}$  — выход**

**Лемма 31.** При  $\delta_n = (1/4) + (3/4)^{n/(n-1)}$  АСVP-алгоритм решает задачу АСVP.

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что базис  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  является  $\delta$ LLL-приведенным, а  $\mathbf{t} \in \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ . Отсюда следует, что для всех  $k = 1, \dots, n$  базисы  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$  являются также  $\delta$ LLL-приведенными. Пусть также  $(\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*)$  — ортогональный базис, полученный из базиса  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  в процессе ортогонализации Грамма-Шмидта.

Тогда АСVP-алгоритм имеет следующее эквивалентное описание, позволяющее провести доказательство индукцией по размерности решетки:

- Найти такое целое число  $c$ , для которого гиперплоскость  $c\mathbf{b}_n^* + \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$  является ближайшей к вектору  $\mathbf{t}$ .
- Найти проекцию  $\mathbf{t}'$  вектора  $\mathbf{t} - c\mathbf{b}_n$  на  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ .
- Применить АСVP-алгоритм к решетке  $L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$  и вектору  $\mathbf{t}'$ . Получим вектор  $\mathbf{x}' \in L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ .

- $\mathbf{x} := \mathbf{x}' + c\mathbf{b}_n$  — решение ACVP -задачи.

Пусть  $\mathbf{y} \in L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  — ближайший вектор решетки для  $\mathbf{t}$ . Требуется доказать, что

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{x}\| \leq 2(2/\sqrt{3})^n \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\|.$$

Возможны два случая.

**Случай 1.**  $\|\mathbf{t} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{b}_n^*\|/2$ . В этом случае  $\mathbf{y}$  лежит в гиперплоскости  $c\mathbf{b}_n^* + \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ . Поэтому  $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - c\mathbf{b}_n$  ближайшая к  $\mathbf{t}'$  точка решетки  $L(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ . Тогда по предположению индукции существует  $\mathbf{x}' \in \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ , являющаяся решением задачи ACVP для проекции  $\mathbf{t}'$  вектора  $\mathbf{t} - c\mathbf{b}_n$  на  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ . Поэтому

$$\|\mathbf{t}' - \mathbf{x}'\| \leq 2(2/\sqrt{3})^{n-1} \|\mathbf{t}' - \mathbf{y}'\|.$$

Следовательно, учитывая неравенство  $1 \leq 4(2/\sqrt{3})^{2(n-1)}$  и ортогональность вектора  $\mathbf{t} - \mathbf{t}'$  гиперплоскости  $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t} - \mathbf{x}\|^2 &= \|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|^2 + \|\mathbf{t}' - \mathbf{x}'\|^2 \leq \|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|^2 + 4(2/\sqrt{3})^{2(n-1)} \|\mathbf{t}' - \mathbf{y}'\|^2 \\ &\leq 4(2/\sqrt{3})^{2(n-1)} \|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|^2 + 4(2/\sqrt{3})^{2(n-1)} \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\|^2 \\ &= 4(2/\sqrt{3})^{2(n-1)} (\|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|^2 + \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\|^2) \\ &= 4(2/\sqrt{3})^{2(n-1)} \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\|^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{x}\| \leq 2(2/\sqrt{3})^{n-1} \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\| < 2(2/\sqrt{3})^n \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\|.$$

**Случай 2.**  $\|\mathbf{t} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{b}_n^*\|/2$ . Из лемм 28 и 29 следует, что выполняется равенство  $\mathbf{t} - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{b}_i^*$ , где  $|\mu_i| \leq 1/2$ . Условие  $\delta$  LLL -приведенности базиса  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  означает, что для всех  $i \leq n$  выполняются неравенства  $\|\mathbf{b}_i^*\| \leq \alpha^{n-i} \|\mathbf{b}_n^*\|$ , где  $\alpha = 2/\sqrt{4\delta - 1}$ . Поэтому,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t} - \mathbf{x}\|^2 &= \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \|\mathbf{b}_i^*\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha^{2(n-i)} \|\mathbf{b}_n^*\|^2 \\ &= \frac{\alpha^{2n-1}}{\alpha^2-1} \|\mathbf{b}_n^*\|^2 \\ &= \frac{\alpha^{2(n-1)}}{4} \left(1 + \frac{1-\alpha^{2(1-n)}}{\alpha^2-1}\right) \|\mathbf{b}_n^*\|^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку  $\alpha = 2/\sqrt{4\delta - 1}$  и  $\delta = (1/4) + (3/4)^{n/(n-1)}$ , выполняются равенства  $\alpha^{2(n-1)} = (4/3)^n$  и  $\alpha^2 = (4/3)^{1+1/(n-1)}$ . Поэтому из соотношения 3.10 следует

$$\|\mathbf{t} - \mathbf{x}\|^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(1 + \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{n-1}} - 1}\right) \|\mathbf{b}_n^*\|^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^n \|\mathbf{b}_n^*\|^2.$$

□

### 3.5 О сложности задач CVP и SVP

В разделе 3.3 были описаны три варианта задачи CVP: задача поиска, задача оптимизации и задача распознавания. Очевидно, что, зная полиномиальный алгоритм решения задачи поиска, можно построить полиномиальные алгоритмы задач оптимизации и распознавания, а зная полиномиальный алгоритм решения задачи оптимизации, можно построить полиномиальный алгоритм решения задачи распознавания. Поэтому задача поиска не проще задач оптимизации и распознавания, а задача оптимизации не проще задачи распознавания. Докажем, что зная полиномиальный алгоритм решения задачи распознавания, можно построить полиномиальный алгоритм решения задачи поиска.

**Теорема 25.** Пусть  $\mathcal{A}$  — оракул решающий распознавательный вариант задачи CVP. Тогда существует полиномиальный алгоритм с оракулом  $\mathcal{A}$  для решения задачи поиска для CVP.

*Доказательство.* На вход алгоритма подаются решетка  $B \in \mathbb{Z}^{n \times m}$  и вектор  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$ . Требуется найти вектор  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , такой что  $\|B\mathbf{x} - \mathbf{t}\| = \min_{\mathbf{y} \in L(B)} \|\mathbf{t} - \mathbf{y}\| = \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B))$ . Рассмотрим решетку  $B' = [2\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]$ .

Выполняется неравенство  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B)) \leq \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B'))$ , поскольку  $L(B') \subset L(B)$ . Чтобы проверить выполняется ли строгое неравенство, воспользуемся оракулом  $\mathcal{A}$ . Без ограничения общности, можно считать, что  $\mathbf{t} \in \mathbf{Span}(B)$  (в противном случае рассмотрим вектор  $\mathbf{t}' = \mathbf{t} - \pi_B \mathbf{t}$ , где  $\pi_B \mathbf{t}$  — проекция вектора  $\mathbf{t}$  на  $\mathbf{Span}(B)$ ). В этом случае квадрат расстояния от вектора

$\mathbf{t}$  до решетки не превосходит величины  $R = \sum_i \|\mathbf{b}_i\|^2$ . Воспользовавшись бинарным поиском и оракулом  $\mathcal{A}$  найдем за полиномиальное время такое целое  $r$ , для которого выполняются неравенства  $r < \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B))^2 \leq r + 1$ . Обратимся теперь к оракулу  $\mathcal{A}$  на входе  $(B', \mathbf{t}, \text{ratapp}(\sqrt{r+1}))$ , где  $\text{ratapp}(\sqrt{r})$  — рациональное число из полуинтервала  $(\sqrt{r}, \sqrt{r+1}]$ . В случае ответа **NO**, выполняются неравенства

$$\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B')) > \sqrt{r+1} \geq \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B)).$$

В случае же ответа **YES** выполняются неравенства

$$\sqrt{r} < \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B)) \leq \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B')) \leq \sqrt{r+1}$$

и, следовательно  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B)) = \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B'))$ , поскольку  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B))^2$  и  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B'))^2$  — целые. Заметим теперь, что если для некоторого ближайшего к  $\mathbf{t}$  вектора  $\mathbf{x}$  координата  $x_1$  четная, то  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B)) = \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B'))$ , если же координата  $x_1$  нечетна для всех ближайших векторов  $\mathbf{x}$ , то  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B)) < \mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B'))$ . Поэтому результат сравнения величин  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B))$  и  $\mathbf{dist}(\mathbf{t}, L(B'))$  позволяет определить четность координаты  $x_1$  для некоторого ближайшего вектора  $B\mathbf{x}$ . Теперь зная младший бит координаты  $x_1$  для некоторого ближайшего вектора, найдем следующие по значению биты этой координаты с помощью следующей процедуры. Положим  $\mathbf{t}' = \mathbf{t} - \varepsilon \mathbf{b}_1$ , где  $\varepsilon = 0$  для выбора четного бита и  $\varepsilon = 1$  в случае выбора нечетного бита. Применяем теперь описанную процедуру для решетки  $B'$  и вектора  $\mathbf{t}'$ . Отметим, что число требуемых шагов (количество битов координаты  $x_1$ ) оценивается при помощи правила Крамера и полиномиально относительно размера входа  $(B, \mathbf{t})$ . Следовательно, после полиномиального числа итераций координата  $x_1$  будет найдена.

Пусть найдены координаты  $x_1, \dots, x_k$ . Заменим теперь решетку  $B$  подрешеткой  $[\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_m]$ , а вектор  $\mathbf{t}$  вектором  $\mathbf{t}' = \mathbf{t} - \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{b}_i$  и выполним процедуру для нахождения  $x_{k+1}$ . Заметим, что по окончании каждой итерации построена такая последовательность координат  $x_1, \dots, x_k$ , для которой существует решение исходной задачи CVP вида  $\sum_{i=1}^k x_i \mathbf{b}_i + \mathbf{t}'$  для некоторого  $\mathbf{t}' \in L(\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_m)$ . В частности, после  $m$  итераций получим решение задачи CVP для входа  $(B, \mathbf{t})$ .  $\square$

**Следствие 8.** Три варианта задачи CVP: задача поиска, задача оптимизации и задача распознавания, — полиномиально эквивалентны.

Таким образом сложность задачи CVP полностью определяется сложностью задачи распознавания.

**Определение 3.5.1.** *Задача о рюкзаке (The Knapsack problem), задача КР.* Заданы  $n + 1$  целых чисел  $\{a_1, \dots, a_n, s\}$ . Найти подмножество  $J \subset \{1, \dots, n\}$ , для которого  $\sum_{i \in J} a_i = s$ . Задача распознавания КР заключается в проверке существования такого подмножества  $J$ .

**Теорема 26.** Задача распознавания КР является NP-полной.

Доказательство см. в Гэрри, Джонсон.

**Теорема 27.** Для всех  $p \geq 1$  задача распознавания CVP является NP-полной для любой нормы  $l_p$ .

*Доказательство.* Задача CVP, очевидно, принадлежит классу NP. Достаточно продемонстрировать полиномиальную сводимость распознавательного варианта задачи КР к распознавательному варианту задачи CVP.

Итак, пусть требуется решить задачу КР на входе  $\{a_1, \dots, a_n, s\}$ . Определим векторы  $\mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{t}$  формулами

$$\mathbf{b}_i = (a_i, \overbrace{0, \dots, 0}^{i-1}, 2, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-i})^T$$

и

$$\mathbf{t} = (s, \underbrace{1, \dots, 1}_n)^T.$$

В матричных обозначениях базис  $B$  можно выразить в виде

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 2I_n \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор-строка  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Сводим теперь задачу КР на входе  $\{a_1, \dots, a_n, s\}$  к задаче распознавания для CVP на входе  $(B, \mathbf{t}, \sqrt[p]{n})$ . Здесь под  $\sqrt[p]{n}$  будем понимать любое рациональное число, принадлежащее интервалу  $[\sqrt[p]{n}, \sqrt[p]{n+1})$ . При  $p = +\infty$  подставляем 1 вместо  $\sqrt[p]{n}$ , поскольку  $\lim_{p \rightarrow +\infty} n^{1/p} = 1$ .

Докажем правильность такой редукции, т.е. если в задаче распознавания КР на входе  $(a, s)$  получаем результат YES, то и на входе  $(B, \mathbf{t}, \sqrt[p]{n})$  для задачи CVP получаем результат YES, а если в задаче распознавания КР на входе  $(a, s)$  получаем результат NO, то и на входе  $(B, \mathbf{t}, \sqrt[p]{n})$  для задачи CVP получаем результат NO. Сначала предположим, что существует решение задачи КР, т.е. при некоторых  $x_i \in \{0, 1\}$  выполняется равенство  $\sum_{i=1}^n x_i a_i = s$ . Тогда

$$B\mathbf{x} - \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sum_i a_i x_i - s \\ 2x_1 - 1 \\ \vdots \\ 2x_n - 1 \end{pmatrix}$$

и  $p$ -я степень  $l_p$ -нормы этого вектора равна

$$\|B\mathbf{x} - \mathbf{t}\|^p = \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - s \right|^p + \sum_{i=1}^n |2x_i - 1|^p = n,$$

поскольку  $\sum_{i=1}^n x_i a_i - s = 0$  и  $2x_i - 1 = \pm 1$  для всех  $i$ . Поэтому расстояние от вектора  $\mathbf{t}$  до решетки  $L(B)$  не превосходит  $\sqrt[p]{n}$  и следовательно результатом задачи распознавания CVP на входе  $(B, \mathbf{t}, \sqrt[p]{n})$  будет YES.

Предположим теперь, что результатом задачи распознавания CVP на входе  $(B, \mathbf{t}, \sqrt[p]{n})$  будет YES. Следовательно, существует такой целочисленный вектор  $\mathbf{x}$ , такой что  $\|B\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \leq \sqrt[p]{n}$ . Тогда

$$\|B\mathbf{x} - \mathbf{t}\|^p = \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - s \right|^p + \sum_{i=1}^n |2x_i - 1|^p,$$

причем для второго слагаемого в правой части равенства выполняется соотношение  $\sum_{i=1}^n |2x_i - 1|^p \geq n$ , поскольку все величины  $2x_i - 1$  нечетные.

Поэтому соотношение  $\|B\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \leq \sqrt[n]{n}$  возможно лишь при выполнении соотношения  $\sum_i a_i x_i = s$  и  $|2x_i - 1|^p = 1$  для всех  $i$ . Таким образом доказано, что  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = s$  и  $x_i \in \{0, 1\}$  для всех  $i$ , т.е.  $\mathbf{x}$  — решение задачи о рюкзаке.  $\square$

Теперь рассмотрим соотношение между сложностями задач SVP и CVP. Начнем с простой леммы.

**Лемма 32.** Пусть  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i$  — кратчайший вектор в решетке  $\Lambda = L(B)$ . Тогда при некотором  $i$  коэффициент  $c_i$  нечетный.

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i$  — кратчайший вектор в решетке и все коэффициенты  $c_i$  четные. Тогда вектор  $\frac{1}{2}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}c_i \mathbf{b}_i$  также вектор решетки и его длина вдвое меньше длины вектора  $\mathbf{v}$ .  $\square$

Опишем теперь сведение задачи SVP к задаче CVP.

**Сведение.** По заданному базису  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$  построим  $m$  задач CVP следующим образом. Задача с номером  $j$  задается базисом

$$B^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, 2\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_m)$$

и вектором  $\mathbf{b}_j$ . В задаче поиска используем  $m$  обращений к оракулу для CVP и из полученных  $m$  ответов  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  выбираем такой  $\mathbf{v}_j$ , на котором достигается минимум погрешностей  $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{b}_i\|$ . Для задачи распознавания в качестве входа добавляется параметр  $r$  и выдается ответ YES, тогда и только тогда, когда хотя бы в одной из задач получен ответ YES.

Для доказательства правильности редукции потребуются две леммы.

**Лемма 33.** Пусть  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i$  — вектор в решетке  $\Lambda = L(B)$ , причем для некоторого  $j$  число  $c_j$  нечетно. Тогда  $\mathbf{u} = \frac{c_j+1}{2}(2\mathbf{b}_j) + \sum_{i \neq j} c_i \mathbf{b}_i$  принадлежит решетке  $L(B^{(j)})$  и расстояние между  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{b}_j$  равно длине вектора  $\mathbf{v}$ .

*Доказательство.* Первое утверждение леммы следует из нечетности  $c_j$  при некотором  $j$ . Второе утверждение следует из равенства

$$\mathbf{u} - \mathbf{b}_j = \frac{c_j + 1}{2} 2\mathbf{b}_j + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j = c_j \mathbf{b}_j + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i = \mathbf{v}.$$

□

**Лемма 34.** Пусть  $\mathbf{u} = c'_j(2\mathbf{b}_j) + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i$  — вектор в решетке  $\Lambda = L(B^{(j)})$ .

Тогда  $\mathbf{v} = (2c'_j - 1)\mathbf{b}_j + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i$  — ненулевой вектор решетки  $L(B)$  и длина  $\mathbf{v}$  равна расстоянию между  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{b}_j$ .

*Доказательство.* Первое утверждение леммы следует из нечетности коэффициента  $2c'_j - 1$ . Второе — из равенства

$$\mathbf{v} = (2c'_j - 1)\mathbf{b}_j + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i = 2c'_j(2\mathbf{b}_j) + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j = \mathbf{u} - \mathbf{b}_j.$$

□

**Теорема 28.** Описанная выше процедура **Сводимость** сводит задачу SVP к задаче CVP.

*Доказательство.* Докажем теорему в случае задачи распознавания:  $(B, r) \in SVP \Leftrightarrow \exists j : (B^{(j)}, b_j, r) \in CVP$ . Другие случаи разбираются аналогично.

Пусть  $(B, r)$  — вход задачи SVP. Ему соответствуют  $m$  задач CVP для входов  $(B^{(j)}, \mathbf{b}_j, r)$ . Докажем, что если на входе  $(B, r)$  задачи SVP получен ответ YES, то хотя бы один ответ YES получен в последовательности результатов решения задачи CVP для входов  $(B^{(j)}, \mathbf{b}_j, r)$ , а если на входе  $(B, r)$  задачи SVP получен ответ NO, то ответ NO получен для всех входов  $(B^{(j)}, \mathbf{b}_j, r)$  для задачи CVP.

Пусть на входе  $(B, r)$  задачи SVP получаем YES и  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i$  — кратчайший вектор в решетке  $L(B)$ . Тогда  $\mathbf{v} \leq r$  и согласно лемме 32 при некотором  $j$  коэффициент  $c_j$  нечетный. Тогда согласно лемме 33 вектор



$\mathbf{u} = \frac{c_j+1}{2}(2\mathbf{b}_j) + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i$  принадлежит решетке  $L(B^{(j)})$  и расстояние между  $\|\mathbf{u} - \mathbf{b}_j\| = \|\mathbf{v}\| \leq r$ , что означает исход YES для запроса оракула на входе  $(B^{(j)}, \mathbf{b}_j, r)$ .

Предположим теперь, что на входе  $(B^{(j)}, \mathbf{b}_j, r)$  задачи CVP получаем YES, т.е. при некотором  $\mathbf{u} \in L(B^{(j)})$  выполняется соотношение  $\|\mathbf{u} - \mathbf{b}_j\| \leq r$ . Тогда согласно лемме 34 для ненулевого вектора  $\mathbf{v} = (2c'_j - 1)\mathbf{b}_j + \sum_{i \neq j}^n c_i \mathbf{b}_i$  решетки  $L(B)$  выполняются соотношения  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{b}_j\| \leq r$ , что означает исход YES для запроса на входе  $(B, r)$  задачи SVP.  $\square$

### 3.6 Результаты Айтаи о сложности поиска короткого вектора в случайной решетке

Цель настоящей лекции — дать формулировку результатов Айтаи о случайном классе решеток в  $\mathbb{Z}^n$ , элементы которых порождаются некоторым базисом с коротким вектором в нем, так, что если имеется вероятностный алгоритм нахождения короткого вектора в случайной решетке из данного класса с вероятностью не менее  $1/2$ , то имеется также вероятностный алгоритм, решающий следующие три задачи в *любой* решетке в  $\mathbb{Z}^n$  с вероятностью экспоненциально близкой к 1:

(P1) Найти длину кратчайшего ненулевого вектора в  $n$ -мерной решетке приближенно с точностью до полиномиального (по  $n$ ) множителя;

(P2) Найти кратчайший ненулевой вектор в  $n$ -мерной решетке  $L$ , в которой кратчайший вектор  $\mathbf{v}$  единственный в том смысле, что любой другой вектор с длиной не более  $n^c \|\mathbf{v}\|$ , параллелен  $\mathbf{v}$ , где  $c$  достаточно большая абсолютная константа;

(P3) Найти базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  в  $n$ -мерной решетке  $L$ , с длиной определенной как  $\max_{i=1}^n \|\mathbf{b}_i\|$ , кратчайший с точностью до полиномиального (по  $n$ ) множителя.

Получены следующие следствия:

а) существует односторонняя функция;

б) для любого фиксированного  $0 < \varepsilon < 1/2$  существует полиномиально вычислимая функция  $r(m)$  с  $m^\varepsilon \leq \log r(m) \leq m^{2\varepsilon}$  такая, что рандоми-

зированная задача «СУММА ПОДМНОЖЕСТВ»:

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i \equiv b \pmod{r(m)},$$

$x_i \in \{0, 1\}$ , для  $i = 1, \dots, m$ , не имеет вероятностного полиномиального алгоритма решения, где  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и  $b$  выбираются случайно и равномерно из интервала  $[1, r(m)]$ .

Напомним, некоторые результаты из теории решеток. Вопрос о нахождении короткого вектора в решетке был сформулирован еще Дирихле в 1842 г. в форме проблемы о совместных диофантовых приближениях. Теорема Минковского о выпуклом центрально симметричном теле (1896 г.) также дает оценку длины кратчайшего ненулевого вектора. Для случая евклидовой нормы, когда выпуклое тело является сферой, она дает оценку  $sh(L) \leq c\sqrt{n}(\det L)^{1/n}$ ,  $\det L$  — детерминант решетки  $L$ . Доказательства теорем Дирихле и Минковского являются неконструктивными и не дают никаких способов построения коротких векторов в решетке.

Определим сейчас случайный класс решеток, который мы будем рассматривать. Мы будем рассматривать решетки как векторы с целочисленными коэффициентами, более того вектора будут определены по модулю некоторого целого числа  $q$ , так что если векторы конгруэнтны по модулю  $q$ , то они оба либо принадлежат решетке, либо оба не принадлежат.

Пусть набор векторов  $\nu = [u_1, \dots, u_m]$ , где  $u_i \in \mathbb{Z}^n$ . Тогда  $\Lambda(\nu, q)$  — определяется как решетка всех последовательностей целых  $h_1, \dots, h_m$  таких, что

$$\sum_{i=1}^m h_i u_i \equiv 0 \pmod{q}$$

Выбор параметров  $q$  и  $m$  осуществляется следующим образом. Они будут зависеть от двух абсолютных констант  $c_1, c_2$ . При заданном  $n$  положим  $m = \lfloor c_1 n \log n \rfloor$ ,  $q = \lfloor n^{c_2} \rfloor$ .

Определим теперь параметр  $\lambda$  в решетке  $\Lambda(\lambda, q)$ . Выберем случайные независимые векторы  $v_1, \dots, v_{m-1}$  равномерно на множестве всех векторов  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ , с  $0 \leq x_i < q$ . Независимо от этого случайного выбора выберем также последовательность случайных бит  $\delta_1, \dots, \delta_{m-1}$ , где каждое  $\delta_i$  выбирается случайно и равномерно из множества  $\{0, 1\}$ .

Определим

$$v_m \equiv - \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i v_i \pmod{q}$$

с дополнительным ограничением, что каждая компонента  $v_m$  является целым числом из интервала  $[0, q - 1]$ .

Пусть  $\lambda = (v_1, \dots, v_m)$ . Чтобы подчеркнуть зависимость  $\lambda$  от  $n, c_1, c_2$  мы будем писать  $\lambda_{n, c_1, c_2}$ . По теореме Дирихле для достаточно больших  $c_1$ , всегда существует вектор короче, чем  $n$ .

**Определение 3.6.1.** Если  $v$  — кратчайший ненулевой вектор в решетке  $L \subseteq \mathbb{R}^n$ , и  $\alpha > 1$  то скажем, что  $v$  является  $\alpha$ -единственным, если для любого  $w \in L$ , из неравенства  $\|w\| \leq \alpha \|v\|$  вытекает, что вектора  $v$  и  $w$  — параллельны.

**Теорема 29.** Существуют абсолютные константы  $c_1, c_2, c_3$  такие, что верно следующее. Предположим, что имеется вероятностный полиномиальный алгоритм  $A$ , который, получая на вход случайную переменную  $\lambda_{n, c_1, c_2}$  с вероятностью не менее  $1/2$  выдает ненулевой вектор решетки  $\Lambda(\lambda_{n, c_1, c_2}, [n^{c_2}])$  длины не более  $n$ . Тогда имеется также вероятностный алгоритм  $B$  со следующими свойствами. Если линейно независимые векторы  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^n$  даны как вход, то алгоритм  $B$  за время полиномиальное от  $\sigma = \sum_{i=1}^n \text{size}(a_i)$ , выдает  $z, u, (d_1, \dots, d_n)$  такие, что с вероятностью более  $1 - 2^{-\sigma}$  выполнены три требования:

(1.1) если  $v$  — кратчайший ненулевой вектор в решетке  $L(a_1, \dots, a_n)$ , то

$$z \leq \|v\| \leq n^{c_3} z;$$

(1.2) если  $v$   $n^{c_3}$ -единственный кратчайший ненулевой вектор в решетке  $L(a_1, \dots, a_n)$ , то  $u = v$  или  $u = -v$ ;

(1.3)  $d_1, \dots, d_n$  является базисом, причем  $\max_{i=1}^n \|d_i\| \leq n^{c_3} \text{bl}(L)$ .

**Односторонние функции.** Определим одностороннюю функцию  $f$  следующим образом. Для любого натурального  $n$  определим  $f = f^{(n)}$ . Пусть  $m = \lfloor c_1 n \log n \rfloor$ ,  $q = \lfloor n^{c_2} \rfloor$ ,  $c_1, c_2$  — даны в теореме. Областью определения  $f$  будет множество всех последовательностей  $v_1, \dots, v_{m-1}, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}$ ,

где каждое  $v_i$ , является  $n$ -мерным вектором  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ , причем  $0 \leq x_i < q$ , и каждое  $\delta_i$  есть 0 или 1.

Предположим теперь, что  $x = (v_1, \dots, v_{m-1}, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}) \in \text{domain}(f)$ . Положим

$$v_m \equiv - \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i v_i \pmod{q}$$

с дополнительным ограничением, что каждая компонента  $v_m$  является целым числом из интервала  $[0, q - 1]$ . Теперь положим

$$f(x) = (v_1, \dots, v_{m-1}, v_m).$$

Посмотрим выполнено ли определение односторонней функции. Предположим, что

$$y = (v_1, \dots, v_m) = f(x),$$

где  $x$  — случайный элемент  $\text{domain}(f)$ . Это означает, что  $y$  является случайной переменной  $\lambda_{n,c_1,c_2}$ . Следовательно, если есть алгоритм инвертирования  $f$  на  $y$ , то есть алгоритм, который находит  $x'$  такое, что  $f(x') = y$ , то этот алгоритм находит также короткий ненулевой вектор в  $\Lambda(\lambda_{n,c_1,c_2}, \lfloor n^{c_2} \rfloor)$ . Следовательно, из теоремы вытекает, что если хотя бы одна из трех проблем трудна в худшем случае (не имеет полиномиального вероятностного алгоритма), то  $f$  — односторонняя функция.

### 3.7 Алгоритмическая сложность задач нахождения короткого вектора в решетках

Цель настоящей лекции — дать формулировку результатов Айтаи о случайном классе решеток в  $\mathbb{Z}^n$ , элементы которых порождаются некоторым базисом с коротким вектором в нем, так, что если имеется вероятностный алгоритм нахождения короткого вектора в случайной решетке из данного класса с вероятностью не менее  $1/2$ , то имеется также вероятностный алгоритм, решающий следующие три задачи в *любой* решетке в  $\mathbb{Z}^n$  с вероятностью экспоненциально близкой к 1:

(P1) Найти длину кратчайшего ненулевого вектора в  $n$ -мерной решетке приближенно с точностью до полиномиального (по  $n$ ) множителя;

(P2) Найти кратчайший ненулевой вектор в  $n$ -мерной решетке  $L$ , в которой кратчайший вектор  $\mathbf{v}$  единственный в том смысле, что любой другой вектор с длиной не более  $n^c \|\mathbf{v}\|$ , параллелен  $\mathbf{v}$ , где  $c$  достаточно большая абсолютная константа;

(P3) Найти базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  в  $n$ -мерной решетке  $L$ , с длиной определенной как  $\max_{i=1}^n \|\mathbf{b}_i\|$ , кратчайший с точностью до полиномиального (по  $n$ ) множителя.

Получены следующие следствия:

а) существует односторонняя функция;

б) для любого фиксированного  $0 < \varepsilon < 1/2$  существует полиномиально вычислимая функция  $r(m)$  с  $m^\varepsilon \leq \log r(m) \leq m^{2\varepsilon}$  такая, что рандомизированная задача «СУММА ПОДМНОЖЕСТВ»:

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i \equiv b \pmod{r(m)},$$

$x_i \in \{0, 1\}$ , для  $i = 1, \dots, m$ , не имеет вероятностного полиномиального алгоритма решения, где  $a_i, i = 1, \dots, m$ , и  $b$  выбираются случайно и равномерно из интервала  $[1, r(m)]$ .

Напомним, некоторые результаты из теории решеток. Вопрос о нахождении короткого вектора в решетке был сформулирован еще Дирихле в 1842 г. в форме проблемы о совместных диофантовых приближениях. Теорема Минковского о выпуклом центрально симметричном теле (1896 г.) также дает оценку длины кратчайшего ненулевого вектора. Для случая евклидовой нормы, когда выпуклое тело является сферой, она дает оценку  $sh(L) \leq c\sqrt{n}(\det L)^{1/n}$ ,  $\det L$  — детерминант решетки  $L$ . Доказательства теорем Дирихле и Минковского являются неконструктивными и не дают никаких способов построения коротких векторов в решетке.

Определим сейчас случайный класс решеток, который мы будем рассматривать. Мы будем рассматривать решетки как векторы с целочисленными коэффициентами, более того вектора будут определены по модулю некоторого целого числа  $q$ , так что если векторы конгруэнтны по модулю  $q$ , то они оба либо принадлежат решетке, либо оба не принадлежат.

Пусть набор векторов  $\nu = [u_1, \dots, u_m]$ , где  $u_i \in \mathbb{Z}^n$ . Тогда  $\Lambda(\nu, q)$  — определяется как решетка всех последовательностей целых  $h_1, \dots, h_m$  та-

ких, что

$$\sum_{i=1}^m h_i u_i \equiv 0 \pmod{q}$$

Выбор параметров  $q$  и  $m$  осуществляется следующим образом. Они будут зависеть от двух абсолютных констант  $c_1, c_2$ . При заданном  $n$  положим  $m = \lfloor c_1 n \log n \rfloor$ ,  $q = \lfloor n^{c_2} \rfloor$ .

Определим теперь параметр  $\lambda$  в решетке  $\Lambda(\lambda, q)$ . Выберем случайные независимые векторы  $v_1, \dots, v_{m-1}$  равномерно на множестве всех векторов  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ , с  $0 \leq x_i < q$ . Независимо от этого случайного выбора выберем также последовательность случайных бит  $\delta_1, \dots, \delta_{m-1}$ , где каждое  $\delta_i$  выбирается случайно и равномерно из множества  $\{0, 1\}$ .

Определим

$$v_m \equiv - \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i v_i \pmod{q}$$

с дополнительным ограничением, что каждая компонента  $v_m$  является целым числом из интервала  $[0, q - 1]$ .

Пусть  $\lambda = (v_1, \dots, v_m)$ . Чтобы подчеркнуть зависимость  $\lambda$  от  $n, c_1, c_2$  мы будем писать  $\lambda_{n, c_1, c_2}$ . По теореме Дирихле для достаточно больших  $c_1$ , всегда существует вектор короче, чем  $n$ .

**Определение 3.7.1.** Если  $v$  — кратчайший ненулевой вектор в решетке  $L \subseteq \mathbb{R}^n$ , и  $\alpha > 1$  то скажем, что  $v$  является  $\alpha$ -единственным, если для любого  $w \in L$ , из неравенства  $\|w\| \leq \alpha \|v\|$  вытекает, что вектора  $v$  и  $w$  — параллельны.

**Теорема 30.** Существуют абсолютные константы  $c_1, c_2, c_3$  такие, что верно следующее. Предположим, что имеется вероятностный полиномиальный алгоритм  $A$ , который, получая на вход случайную переменную  $\lambda_{n, c_1, c_2}$  с вероятностью не менее  $1/2$  выдает ненулевой вектор решетки  $\Lambda(\lambda_{n, c_1, c_2}, \lfloor n^{c_2} \rfloor)$  длины не более  $n$ . Тогда имеется также вероятностный алгоритм  $B$  со следующими свойствами. Если линейно независимые векторы  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^n$  даны как вход, то алгоритм  $B$  за время полиномиальное от  $\sigma = \sum_{i=1}^n \text{size}(a_i)$ , выдает  $z, u, (d_1, \dots, d_n)$  такие, что с вероятностью более  $1 - 2^{-\sigma}$  выполнены три требования:

(1.1) если  $v$  — кратчайший ненулевой вектор в решетке  $L(a_1, \dots, a_n)$ , то

$$z \leq \|v\| \leq n^{c_3} z;$$

(1.2) если  $v$   $n^{c_3}$ -единственный кратчайший ненулевой вектор в решетке  $L(a_1, \dots, a_n)$ , то  $u = v$  или  $u = -v$ ;

(1.3)  $d_1, \dots, d_n$  является базисом, причем  $\max_{i=1}^n \|d_i\| \leq n^{c_3} bl(L)$ .

**Односторонние функции.** Определим одностороннюю функцию  $f$  следующим образом. Для любого натурального  $n$  определим  $f = f^{(n)}$ . Пусть  $m = \lfloor c_1 n \log n \rfloor$ ,  $q = \lfloor n^{c_2} \rfloor$ ,  $c_1, c_2$  — даны в теореме. Областью определения  $f$  будет множество всех последовательностей  $v_1, \dots, v_{m-1}, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}$ , где каждое  $v_i$  является  $n$ -мерным вектором  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ , причем  $0 \leq x_i < q$ , и каждое  $\delta_i$  есть 0 или 1.

Предположим теперь, что  $x = (v_1, \dots, v_{m-1}, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}) \in \text{domain}(f)$ . Положим

$$v_m \equiv - \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i v_i \pmod{q}$$

с дополнительным ограничением, что каждая компонента  $v_m$  является целым числом из интервала  $[0, q - 1]$ . Теперь положим

$$f(x) = (v_1, \dots, v_{m-1}, v_m).$$

Посмотрим выполнено ли определение односторонней функции. Предположим, что

$$y = (v_1, \dots, v_m) = f(x),$$

где  $x$  — случайный элемент  $\text{domain}(f)$ . Это означает, что  $y$  является случайной переменной  $\lambda_{n, c_1, c_2}$ . Следовательно, если есть алгоритм инвертирования  $f$  на  $y$ , то есть алгоритм, который находит  $x'$  такое, что  $f(x') = y$ , то этот алгоритм находит также короткий ненулевой вектор в  $\Lambda(\lambda_{n, c_1, c_2}, \lfloor n^{c_2} \rfloor)$ . Следовательно, из теоремы вытекает, что если хотя бы одна из трех проблем трудна в худшем случае (не имеет полиномиального вероятностного алгоритма), то  $f$  — односторонняя функция.

# Глава 4

## Некоторые криптосистемы на решетках

### 4.1 NTRU

Рассмотрим кольцо  $\mathbb{Z}[X]/(X^N - 1)$ . Элементы этого кольца можно отождествить с многочленами с целыми коэффициентами степени не выше  $N - 1$ . Сложение определяется по-компонентно. Умножение задается формулой

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k \sum_{k=0}^{N-1} b_k X^k = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{i+j \equiv k \pmod{N}} a_i b_j \right) X^k.$$

Операции в кольце многочленов  $\mathbb{Z}_q[X]/(X^N - 1)$  определяются так же, как и в кольце  $\mathbb{Z}[X]/(X^N - 1)$  с той лишь разницей, что операции над коэффициентами выполняются в кольце  $\mathbb{Z}_q$ . В этом кольце имеется группа единиц.

**Задача** Если  $q$  — простое, то  $\mathbb{Z}_q$  — поле, тогда многочлены  $f(X) \in \mathbb{Z}_q[X]/(X^N - 1)$ , для которых  $\text{НОД}(f(X), X^N - 1) = 1$ , лежат в группе единиц и обратный элемент можно найти с помощью алгоритма Евклида. Доказать, что этот алгоритм имеет сложность  $\mathcal{O}(N^2 \log q)$ .

Пусть теперь  $q = p^t$ , где  $p$  простое и многочлены  $f(X) \in \mathbb{Z}_q[X]/(X^N - 1)$  такие, что  $\text{НОД}(f(X), X^N - 1) = 1$ . С помощью алгоритма Евклида най-



дем многочлены  $u, v, c \in \mathbb{Z}_q[X]/(X^N - 1)$ , для которых

$$u * f + v * (X^N - 1) = 1 - pc.$$

Поэтому  $u * f = 1$  в  $\mathbb{Z}_q[X]/(X^N - 1)$ . Имеем также

$$\begin{aligned} (1 + pc) * u * f &= 1 - p^2c^2 \\ (1 + p^2c^2) * (1 + pc) * u * f &= 1 - p^4c^4 \\ &\vdots \\ (1 + p^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}) * \dots * (1 + p^2c^2) * (1 + pc) * u * f &= 1 - p^{2^s}c^{2^s} \end{aligned}$$

в кольце  $\mathbb{Z}[X]/(X^N - 1)$ . При  $2^s \geq t$  имеем

$$(1 + p^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}) * \dots * (1 + p^2c^2) * (1 + pc) * u * f = 1 \pmod{q}$$

и, следовательно,

$$f^{-1} = (1 + p^{2^{s-1}}c^{2^{s-1}}) * \dots * (1 + p^2c^2) * (1 + pc) * u.$$

#### 4.1.1 Описание NTRU-шифрования

Пусть  $p$  и  $q$  — два небольших взаимно простых числа (например,  $p = 3$  и  $q = 128$ ). (В общем случае  $p$  очень мало, а  $q$  — многочлен от параметра безопасности  $n$ .) Элементы кольца  $R = \mathbb{Z}[X]/(X^n - 1)$  будем представлять многочленом или вектором в  $\mathbb{Z}^n$  вида

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} f_i X^i = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}].$$

Произведение в этом кольце описывается формулой

$$f * g = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}] * [g_0, g_1, \dots, g_{n-1}] = [h_0, h_1, \dots, h_{n-1}],$$

где

$$h_k = \sum_{i=0}^k f_i g_{k-i} + \sum_{i=k+1}^{n-1} f_i g_{n+k-i}.$$

В кольцах  $R_p = R/(p)$  и  $R_q = R/(q)$  коэффициенты многочленов представляются остатками в диапазонах  $[0, p - 1]$  и  $[0, q - 1]$ .

Рассмотрим также множество многочленов  $\mathcal{P}_p(N)$ , элементы которого представляются в виде

$$g = \sum_{i=0}^{N-1} g_i X^i = [g_0, g_1, \dots, g_{N-1}], \text{ где } g_p \in \left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right].$$

**Генерация ключа.** Выбираем два случайных многочлена  $f \in R_1$  и  $g \in R$  с маленькими коэффициентами (, например, из множества  $\{-1, 0, 1\}$ ) и взаимно простые числа  $p$  и  $q$  такие, что для многочлена  $f$  существуют обратные элементы  $f_p^{-1}$  и  $f_q^{-1}$  в кольцах  $R_p = R/(p)$  и  $R_q = R/(q)$ . С вероятностью близкой к единице случайный многочлен  $f$  удовлетворяет этому условию. Обратные элементы  $f_p^{-1}$  и  $f_q^{-1}$  строятся с помощью алгоритма Евклида.

Затем вычисляется многочлен  $h$  в  $R_q = R/(q)$

$$h \equiv p f_q^{-1} * g \pmod{q},$$

где умножение выполняется в кольце  $R = \mathbb{Z}[X]/(X^N - 1)$ . Открытым ключом шифрования объявляется многочлен  $h$  и числа  $q$  и  $p$ . Секретным ключом является пара  $f, g$ .

**Шифрование.** Пусть имеется пара: текст  $m$  и случайный вектор  $r$ . Зашифрованный текст  $e$  получается из по формуле

$$t \equiv r * h + m \pmod{q}.$$

**Дешифрация.** Пусть  $t$  — шифртекст и  $f$  — секретный ключ.

Сначала вычислим многочлен  $a$  по формуле

$$a \equiv f * t \pmod{q},$$

причем коэффициенты многочлена  $a$  находятся в интервале от  $-q/2$  до  $q/2$ . Рассматривая многочлен  $a$  как многочлен с целыми коэффициентами, вычислим многочлен  $m' \in R_p$  по формуле

$$m' \equiv f_p^{-1} * a \pmod{p}.$$

В работе [Hoffstein J., Piper J., Silverman J., NTRU: A ring based public key cryptosystem, in Algebraic number theory (ANTS III), vol.1423 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 267-288, Springer] показано, при соответствующем выборе параметров  $t = a$  с большой вероятностью. Идея такова. Из определения  $t$  и  $h$ , имеем

$$a \equiv f * t \pmod{q} \equiv f * (m + r * h) \pmod{q} \equiv f * m + pgr \pmod{q}.$$

Поскольку коэффициенты многочленов  $f, m, g, r$  малы и  $p$  мало, то с вероятностью близкой к 1 коэффициенты многочлена целочисленного многочлена  $fm + pgr$  лежат в интервале  $[q/2, q/2]$ . Тогда  $a = fm + pgr$  над кольцом целых чисел и  $m' \equiv f^{-1}(fm + pgr) \equiv m \pmod{p}$ . Соответственно  $r = (t - m)(ph)^{-1} \pmod{q}$ .

**Определение 4.1.1.** Целочисленная решетка, содержащая решетку  $q\mathbb{Z}^n$  называется  $q$ -модулярной.

**Определение 4.1.2.** Вектор  $(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$  называется циркулянтном вектора  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  и обозначается  $\mathbf{rot}(\mathbf{x})$ .

Имеется следующее представление кольца многочленов  $R = \mathbb{Z}^n / (x^n - 1)$  циркулянтными матрицами. А именно, сопоставим вектору  $\mathbf{x}$  матрицу из столбцов  $M_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{rot}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{rot}^{n-1}(\mathbf{x}))$ .

**Задача.** Доказать равенство  $M_{\mathbf{x}}M_{\mathbf{y}} = M_{\mathbf{xy}}$ .

**Определение 4.1.3.** Пусть  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$  и  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ . Определим бициркулянт формулой  $\mathbf{rot}_2(\mathbf{z}) = (\mathbf{rot}(\mathbf{x}), \mathbf{rot}(\mathbf{y}))$ .

**Определение 4.1.4.** Целочисленная решетка  $\mathcal{L}$  размерности  $2n$  называется бициклической, если из  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$  следует, что  $\mathbf{rot}_2(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}$ . Иными словами, решетка должна быть замкнута относительно бициркуляций.

**Предложение 1.** Пересечение сохраняет свойства  $q$ -модулярности и бициклическости. В частности, для любого множества векторов  $S \subset \mathbb{Z}^{2n}$  определена минимальная  $q$ -модулярная бициклическая решетка, содержащая множество  $S$ .

Теперь определим  $NTRU$ -шифрование на решетках.

**Секретный ключ.** Секретный ключ определяется коротким вектором  $\mathbf{v}$ . Свяжем с этим вектором бициклическую  $q$ -модулярную решетку (см. предложение 1). Порождающим множеством этой решетки являются бициркулянты вида  $\text{rot}_2^k(\mathbf{v})$  для всех  $k = 0, \dots, n-1$  и множество векторов вида  $qe_k$ , где  $k = 1, \dots, 2n$ .

**Открытый ключ.** Открытый ключ определяется как эрмитов нормальный базис бициклической  $q$ -модулярной решетки, определяемой вектором  $v$ .

**Задача.** При  $\mathbf{v} = (pg, f)$  (см. определение  $NTRU$ -шифрования через многочлены) выполняется равенство

$$H = \begin{pmatrix} qI & M_h \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Иными словами, эта решетка определяется как минимальная бициклическая  $q$ -модулярная решетка, содержащая вектор  $(h, e_1)$ .

**Шифрование.** Рассмотрим вектор  $(m, -r)$ . При приведении этого вектора по модулю эрмитова нормального базиса  $H$  получим шифротекст  $(t, 0)$ , где  $t$  — многочлен из определения шифрования с помощью многочленов.

**Задача.** Докажите это.

**Дешифрация.** Алгоритм дешифрации не имеет геометрической интерпретации и выполняется по ранее описанным формулам.

**Стойкость.** Специфическая структура  $q$ -модулярных бициклических решеток позволяет представлять секретный и открытый ключ, используя только  $O(n)$  битов. С точки зрения эффективности  $NTRU$ -шифрование представляется хорошим методом: шифрование и дешифрация осуществляются достаточно быстро. Главный вопрос о стойкости этой криптосистемы остается в настоящее время открытым. Являются ли задачи на решетках такого специального вида трудными, как и в общем случае? Точное решение также NP-трудная задача? Аппроксимация также NP-трудна? Что можно сказать о трудности в среднем для этого класса решеток? С теоретической точки зрения пока на эти вопросы ответы неизвестны. Однако эта криптосистема уже широко используется и хорошо себя зарекомендовала с практической точки зрения.

## **Глава 5**

# **Обзор современных результатов по алгоритмическим аспектам теории решеток**

# Предметный указатель

Division

Ring, [24](#)

Group

Units, [24](#)

NP, [96](#)

Ring, [22](#)

Commutative, [24](#)

Division, [24](#)

Unitary, [22](#)

Группа

единиц, [24](#)

Класс

NP, [96](#)

Кольцо, [22](#)

Коммутативное, [24](#)

С единицей, [22](#)

с делением, [24](#)

Тело, [24](#)

# Список иллюстраций

# Список алгоритмов

1	Протокол выработки общего секретного ключа . . . . .	8
2	Схема RSA . . . . .	15
3	Полиномиальный алгоритм проверки простоты . . . . .	71



# Список литературы

- [AKS02] M. Agrawal, N. Kayal и N. Saxena. *PRIMES is in P*. Англ. 2002. URL: <http://citeseer.ist.psu.edu/article/agrawal02primes.html>.
- [AKS04] M. Agrawal, N. Kayal и N. Saxena. “PRIMES is in P”. Англ. В: *Annals of Mathematics* 160 (2004), с. 781—793.
- [ЛН88] Р. Лидл и Г. Нидеррайтер. *Конечные поля*. М. Мир, 1988.