Теоретические основы численных методов

Шокуров

20 марта 2024 г.

Постановка задачи о наилучшем приближении

В нормированном пространстве $\mathbf{B}$ фиксируем некоторое непустое подмножество M. Пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в нормированном пространстве $\mathbf{B}$.

Определение

Число $\varepsilon(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ *называется наилучшим приближением элемента* $x \in \mathbf{B}$ *на множестве* M. *Элемент* $y_* \in M$ *называется наименее уклоняющимся от* x, *или элементом наилучшего приближения на множестве* M, *если* $\|x - y_*\| = \varepsilon(x, M)$.

Теорема Бореля

Предложение

(Э.Борель)

1. *Пусть $M \subset \mathbf{B}$ конечномерное подпространство нормированного пространства $\mathbf{B}$. Тогда для любого элемента $x \in \mathbf{B}$ существует хотя бы один наименее уклоняющийся элемент $y \in M$.*
2. *Пусть $M \subset \mathbf{B}$ — выпуклое замкнутое подмножество. Тогда множество наименее уклоняющихся от x элементов выпукло и замкнуто.*

Теорема Бореля

Доказательство.

1. Поскольку M конечномерно, оно замкнуто в $\mathbf{B}$. Для заданного $x \in \mathbf{B}$ рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $\varphi : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$, заданную формулой $\varphi(y) = \|y - x\|$. Фиксируем $y_0 \in M$ и рассмотрим множество $P = \{y \in M| \quad | \quad \|y - x\| \leq \|y_0 - x\|\} = M \bigcap \{y \in \mathbf{B} \quad | \quad \varphi(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{y_0})\}$.

Множество P замкнуто, поскольку является пересечением двух замкнутых множеств. Пусть $y \in P$, тогда

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq \|y_0 - x\| + \|x\|.$$

Следовательно, множество P ограничено. Поэтому, множество P компактно и, следовательно, по теореме Вейерштрасса функция $\varphi(y)$ достигает наименьшего значения на этом множестве. Этот элемент и является наименее уклоняющимся элементом. $\square$

Теорема Бореля

Доказательство.

2. Пусть y_1 и y_2 — два наименее уклоняющиеся элемента от $x \in \mathbf{B}$, т.е. $\varepsilon(x, M) = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$. Тогда для произвольного $0 \leq \alpha \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\|x - (\alpha\, y_1 + (1-\alpha)\, y_2)\| &= \|\alpha\, x + (1-\alpha)\, x - (\alpha\, y_1 + (1-\alpha)\, y_2)\| \\
&= \|\alpha\, (x - y_1) + (1-\alpha)\, (x - y_2)\| \\
&\leq \alpha\, \|(x - y_1)\| + (1-\alpha)\, \|(x - y_2)\| \\
&= \alpha\, \varepsilon(x, M) + (1-\alpha)\, \varepsilon(x, M) \\
&= \varepsilon(x, M). \square
\end{aligned}$$

Обозначим для $M \subset \mathbf{B}$ через P_M множество всех тех элементов $x \in \mathbf{B}$, для которых существует и единственен элемент наилучшего приближения в M. Очевидно, $M \subset P_M$ и определено отображение $\pi : P_M \to M$, где $\pi(x)$ определяется как элемент, наименее уклоняющийся от $x \in P_M$. $\square$

Свойства наименьшего уклонения

Предложение

1. *Для любого $M \subset \mathbf{B}$ функция $\varepsilon(x, M)$ равномерно непрерывна по x.*
2. *Если $M \subset \mathbf{B}$ — подпространство, то :*
   - *(а) $\varepsilon(\alpha\, x, M) = |\alpha|\, \varepsilon(x, M)$ для любых $x \in \mathbf{B}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.*
   - *(б) $\varepsilon(x_1 + x_2, M) \le \varepsilon(x_1, M) + \varepsilon(x_2, M)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{B}$.*
   - *(в) $\varepsilon(x, M) \le \|x\|$ для любого $x \in \mathbf{B}$.*
3. *Пусть $M \subset \mathbf{B}$ — конечномерное линейное многообразие. Тогда отображение $\pi : P_M \to M$ непрерывно.*

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

1. Докажем неравенство

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Для произвольного $y \in M$ имеем
$\varepsilon(x_1, M) \leq \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\|$. Поэтому,
$\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \|x_2 - y\|$. Ввиду произвольности $y \in M$ получим
$\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon(x_2, M)$. Поэтому, выполняется неравенство

$$\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M) \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\varepsilon(x_2, M) - \varepsilon(x_1, M) \leq \|x_2 - x_1\|.$$

Следовательно,

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

3. Рассмотрим сходящуюся в P_M последовательность x_n и пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Докажем сначала, что последовательность $\pi(x_n)$ ограничена. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|\pi(x_n)\| &= \|\pi(x_n) - x_n + x_n\| \\
&\le \|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\| \\
&= \varepsilon(x_n, M) + \|x_n\| \\
&= \varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M) + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \\
&\le |\varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M)| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \\
&\le |x_n - x_0| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\|.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство доказано в п. 1). Поскольку последовательность x_n сходится, все слагаемые последней суммы ограничены. Следовательно, последовательность x_n ограничена.

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

Необходимо доказать, что последовательность $\pi(x_n)$ сходится к $\pi(x_0)$. Пусть это не так. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x_{n_k}, для которых выполняется неравенство

$$|\pi(x_{n_k}) - \pi(x_0)| > \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность x_{n_k} совпадает со всей последовательностью x_n. Поскольку последовательность $\pi(x_n)$ ограничена, а подпространство M конечномерно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

Опять без ограничения общности будем считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\pi(x_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(x_n) = y_0$. Тогда переходя к пределам в неравенствах

$$\|\pi(x_n) - \pi(x_0)\| > \varepsilon,$$

получаем

$$\|y_0 - \pi(x_0)\| \geq \varepsilon > 0.$$

Согласно определению проекции π выполнены равенства

$$\|\pi(x_n) - x_n\| = \varepsilon(x_n, M).$$

$\square$

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

Переходя к пределу, получим ввиду непрерывности функции $\varepsilon(x, M)$ равенство
$$\|y_0 - x_0\| = \varepsilon(x_0, M).$$

Следовательно, y_0 наименее уклоняющийся от x_0 элемент пространства M. Тогда по определению пространства P_M выполняется равенство $y_0 = \pi(x_0)$, что противоречит полученному выше неравенству. $\square$

Строго нормированные пространства

Определение

Линейное нормированное пространство $\mathbf{B}$ *называется строго нормированным, если для любых* $x, y \in \mathbf{B}$ *из* $x \neq 0, y \neq 0, \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ *всегда* $x = \lambda y$*, при некотором* $\lambda > 0$.

Предложение

Банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ *единичной сферы и* $0 < \alpha < 1$ *выполнено неравенство*

$$\|\alpha x + (1 - \alpha) y\| < 1.$$

Строго нормированное пространство

Из предыдущего предложения следует

Предложение

Пусть $\mathbf{B}$ *— линейное строго нормированное пространство,* $x \in \mathbf{B}$*. Тогда*
1. если $M \subset \mathbf{B}$ *выпуклое: то существует не более одного элемента из* M *наименее уклоняющегося от* x*,*
2. если $M \subset \mathbf{B}$ *– конечномерное линейное многообразие, то существует и притом единственный элемент из* M*, наименее уклоняющийся от* x*.*

Примеры

Пример 1. Пусть $\mathbf{B}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), где $(x, y) \in \mathbf{B}$. Тогда пространство $\mathbf{B}$ является строго нормированным относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{B} = L_p(D, \mu)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а μ мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Элементами пространства $\mathbf{B}$ являются классы эквивалентных, измеримых по Лебегу функций $f : D \to \mathbb{R}$, для которых функция f^p является μ-суммируемой по D, а две функции эквивалентны, если их разность равна нулю почти всюду в D. Норма в $\mathbf{B}$ задается равенством:

$$\|f\| = \left(\int\limits_D |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Тогда пространство $\mathbf{B}$ является строго нормированным относительно введенной нормы. Это утверждение следует из неравенства Минковского и условий при которых оно превращается в равенство.

Задачи

Задача 1. Доказать, что банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ единичной сферы и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha x + (1-\alpha) y\| < 1.$$

Задача 2. Доказать, что банахово пространство $\mathbf{B} = C[0,1]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ не является строго нормированным.

Задача 3. Доказать, что банахово пространство классов интегрируемых по Лебегу функций $\mathcal{L}_1[0,1]$ с нормой $\|f\| = \int\limits_0^1 |f(x)|\, d\mu$ не является строго нормированным.

Задачи

Задача 4. Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство и $\mathbf{H}_n$ — его n-мерное подпространство. Пусть отображение $\pi = \pi_n : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ сопоставляет элементу $x \in \mathbf{H}$ наименее уклоняющийся элемент из $\mathbf{H}_n$. Доказать, что

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k$$

и

$$\varepsilon(x, \mathbf{H}_n) = \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $e_1, \ \dots e_n$ — произвольный ортонормированный базис.

Задача 5. Пусть $M \subset \mathbf{B}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, \ \lambda x \in P_M$. Доказать, что тогда выполнено равенство $\pi(\lambda x) = \lambda\, \pi(x)$.

Теорема Чебышева

Пусть $C[D]$ — пространство вещественных непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m,\ m \geq 1$, состоящем из бесконечного числа точек, с нормой максимум модуля $\|f\| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$. Особо выделим два случая: $D = [a, b]$ при $m = 1$ и $D = \mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| = 1\}$ при $m = 2$.

Определение 1. Подпространство $L \subset C[D]$ называется чебышевским, если любая ненулевая функция $f \in L$ имеет не более $n - 1$ корня на отрезке $[a, b]$, где $\dim L = n$.

Согласно теореме Бореля для любой функции $f \in C[D]$ существует наилучшее приближение некоторым элементом из L. Согласно теореме Хаара такое приближение единственно, если пространство L чебышевское. Рассмотрим примеры чебышевских подпространств.

Примеры чебышевских пространств

Пример 1. Пусть функция f_0 не обращается в нуль на компакте D. Тогда пространство $L = [f_0] = \{\alpha f_0 \quad | \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$ является одномерным чебышевским подпространством.

Пример 2. Пусть $I = [a, b]$ и $L = \mathcal{P}_n \subset C[I]$ — пространство многочленов на D степени меньшей чем $n > 0$. Из основной теоремы алгебры следует, что пространство $\mathcal{P}_n$ чебышевское.

Пример 3. Пусть $D = \mathbf{S^1}$. Отождествим пространство $C[\mathbf{S^1}]$ при помощи экспоненциального отображения $\exp : \mathbb{R} \to \mathbf{S^1}$ с пространством 2π-периодических функций на $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{T}_{2n-1},\ n \geq 1$ — пространство тригонометрических многочленов вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx).$$

Это пространство чебышевское, $\dim \mathcal{T}_{2n-1} = 2n - 1$.

Примеры чебышевских пространств

Действительно, пусть $z = e^{ikx}$. Тогда представим тригонометрический многочлен через переменную $z \in \mathbf{S}^1$. Имеем

$$\cos kx = \frac{z^k + z^{-k}}{2} \quad \text{и} \quad \sin kx = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} T(x) = Q(z) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \cdot \frac{z^k + z^{-k}}{2} + b_k \cdot \frac{z^k - z^{-k}}{2i} \right) \\ &= z^{1-n} \sum_{k=0}^{2n-2} c_k z^k. \end{aligned}$$

Следовательно, $T(x) \neq 0$ имеет на полуинтервале $[0, 2\pi)$ не более $2n - 2$ корней.

Примеры чебышевских пространств

Приведенные примеры показывают:

- существование 1-мерных пространств Чебышева в произвольных пространствах функций,
- существование пространств Чебышева произвольной размерности в пространстве непрерывных на отрезке функций,
- существование пространств Чебышева нечетной размерности в пространстве непрерывных на окружности функций, или эквивалентно в пространстве 2π-периодических функций на прямой.

Далее будет доказано, что в пространстве непрерывных на окружности функций не существует пространства Чебышева четной размерности . Сформулируем теперь две теоремы, которые будут доказаны в частных случаях. Именно эти частные случаи будут использоваться в дальнейшем.

Теорема Чебышева

Теорема 1. Пусть $L \subset C[I]$ — чебышевское подпространство, $n = \dim L \geq 1$ и $f \in C[I]$ – произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $n+1$ различные точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $|r(x_i)| = \|r\| = \sup\limits_{x \in I} |r(x)|$ при $1 \leq i \leq n+1$,
2. $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ldots = (-1)^n \cdot r(x_{n+1})$.

Теорема 2. Пусть $L \subset C[\mathbf{S^1}]$ — чебышевское подпространство, $2n - 1 = \dim L \geq 1$ и $f \in C[\mathbf{S^1}]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $2n$ различные точки $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $|r(x_i)| = \|r\| = \sup\limits_{x \in S^1} |r(x)|$ при $1 \leq i \leq 2n$,
2. $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ldots = -r(x_{2n})$.

Теорема Чебышева

Теорема 1 в частном случае $L = P_n$ была доказана Чебышевым. Доказательства теоремы 2 и обобщения теоремы 1 незначительно отличаются от доказательства Чебышева. Поэтому эти теоремы обычно называют теоремами Чебышева.

Определение 2. Пусть $g \in C[I]$. Точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leq b$ называются альтернансом m-го порядка для функции $g(x)$, если $|g(x_i)| = \|g\|, 1 \leq i \leq m$ и $(-1)^i g(x_i) = const$.

Определение 3. Пусть $g \in C[\mathbf{S^1}]$. Точки $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 2\pi$ называются альтернансом m-го порядка для функции $g(x)$, если $|g(x_i)| = \|g\|, 1 \leq i \leq m$ и $(-1)^i g(x_i) = const = g(x_m)$. В силу определения, очевидно, любая ненулевая функция $g \in C[\mathbf{S^1}]$ не имеет альтернанса нечетного порядка. Теоремы 1 и 2 можно переформулировать теперь как одну теорему.

Теорема Чебышева

Теорема 3. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство причем $\dim L \ \geq 1$ и $f \in C[D]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда разность $r(x) = f(x) - p(x)$ имеет альтернанс порядка $\dim L + 1$.

Определение 4. Элементы чебышевского подпространства L в пространстве функций будем называть чебышевскими L-полиномами или просто чебышевскими полиномами. Пусть $f_1, \ \ldots, f_n \in C[D]$ и $x_1, \ \ldots, x_n \in D$. Тогда введем обозначение

$$\Delta_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{f} = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \ \ldots, \mathbf{f_n})$.

Теорема Чебышева

Предложение 1. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство и $\dim L = n$. Тогда

1. элементы $e_1, \ldots, e_n \in L$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$,
2. для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ и любых n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ существует и притом единственный интерполяционный чебышевский многочлен $p \in L$, для которого $p(x_i) = c_i$ при $1 \leq i \leq n$,
3. для любых $n - 1$ попарно различных точек пространство чебышевских многочленов, обращающихся в этих точках в нуль, имеет размерность 1.

Теорема Чебышева

Доказательство. 1) Если $e_1, \ \ldots, e_n \in L$ линейно зависимы, то найдутся такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$. Тогда для любой последовательности точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$ линейная однородная система уравнений $A\mathbf{y} = 0$, где $A = \|e_j(x_i)\|_{1 \leq i,j \leq n}$ имеет ненулевое решение $\mathbf{y} = (\alpha_1, \ \ldots, \alpha_n)^T$. Следовательно, определитель системы равен нулю. Но $\det A = \Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n)$. Поэтому $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n) = 0$ для любой последовательности точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$ и, в частности, для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$.

Свойства Чебышевских пространств

Обратно, пусть $e_1, \ \dots, e_n \in L$ и существуют n различных точек $x_1, x_2, \ \dots, x_n \in D$, для которых выполнено равенство $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \dots, x_n) = 0$. Тогда $\det A = 0$ и, следовательно, столбцы матрицы A линейно зависимы. Поэтому существуют такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}, \ 1 \le i \le n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x_i) = 0$ при всех $1 \le i \le n$. Это означает, что функция $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) \in L$ имеет n различных корней. Поскольку подпространство L чебышевское, то отсюда вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$. Следовательно, вектора $e_1, \ \dots, e_n \in L$ линейно зависимы.

Свойства Чебышевских пространств

2) Пусть $e_1, \ \ldots, e_n$ — базис в чебышевском пространстве L и $c_1, c_2, \ \ldots, c_n$ произвольные n чисел. Тогда согласно уже доказанному определитель системы линейных уравнений $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$, где $A = \|e_j(x_i)\|_{1\le i,j\le n}$, не равен нулю, и, следовательно, эта система имеет ненулевое решение $\mathbf{y}^T = (y_1, \ \ldots, y_n)$. Тогда $p(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k(x)$ определяет искомый интерполяционный многочлен Чебышева.

3) Пусть даны n различных точек $x_1, \ \ldots, x_n$. Согласно 2) существует единственный чебышевский многочлен $p_0(x)$, обращающийся в 0 в точках $x_1, \ \ldots, x_{n-1}$ и равный 1 в точке x_0. Тогда согласно 2) для любого чебышевского многочлена $q(x)$, обращающегося в 0 в точках $x_1, \ \ldots, x_{n-1}$, выполнено равенство $q(x) = q(x_0)p_0(x)$. ■

Свойства Чебышевских пространств

Предложение 2. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство и $\dim L = n$.

1. Пусть $x_1, x_2, \ \ldots, x_n \in D$ и $y_1, y_2, \ \ldots, y_n \in D$ — две системы попарно различных точек и для всех $1 \le i \le n$ существуют непрерывные функции $\xi_i : [0, 1] \to D$, удовлетворяющие условиям: а) $\xi_i(0) = x_i, \xi_i(1) = y_i$ при $1 \le i \le n$, б) для любого t точки $\xi_1(t), \xi_2(t), \ \ldots, \xi_n(t)$ попарно различные. Тогда для любого базиса $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ \ldots, e_n)$ знаки определителей $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \ \ldots, x_n)$ и $\Delta_{\mathbf{e}}(y_1, y_2, \ \ldots, y_n)$ совпадают.
2. Пусть $D = [a, b]$ или $D = \mathbf{S}^1$, а $x_1, x_2, \ \ldots, x_{n-1} \in D$ — попарно различные нули ненулевого элемента $p \in L$. Тогда $p(x)$ не имеет других нулей в D и меняет знак при прохождении x через каждый нуль $x_i, 1 \le i \le n-1$, отличный от концов a, b в случае отрезка $D = [a, b]$.

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию

$$f(t) = \Delta_{\mathbf{e}}(\xi_1(t), \xi_2(t), \ \ldots, \xi_n(t)).$$

Согласно условию эта функция непрерывна. Поскольку по условию при любом t все точки $\xi_1(t), \xi_2(t), \ \ldots, \xi_n(t)$ различны, то согласно предложению 1 функция $f(t)$ не обращается в нуль. Следовательно, $f(0)$ и $f(1)$ имеют одинаковые знаки.

Свойства Чебышевских пространств

2) Пусть $x_1 < x_2 < \ \ldots < x_{n-1} \in D$ — различные корни чебышевского многочлена $p(x)$ и пусть между точками $u, v \in D$ имеется единственный корень x_k ($u, v \neq x_k$). Рассмотрим n непрерывных на $[0, 1]$ функций

$$\xi_1(t) = x_1$$

$$\ldots$$

$$\xi_k(t) = (1 - t)u + tx_k$$

$$\xi_{k+1}(t) = (1 - t)x_k + tv$$

$$\xi_{k+2}(t) = x_{k+1}$$

$$\ldots$$

$$\xi_n(t) = x_{n-1}.$$

Тогда согласно уже доказанному утверждению 1) знаки определителей $\Delta_{\mathbf{e}}(u, x_1, \ \ldots, x_{n-1})$ и $\Delta_{\mathbf{e}}(x_k, x_1, \ \ldots, x_{k-1}, v, x_{k+1}, \ \ldots, x_{n-1})$ совпадают. Согласно предложению 1 для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $p(x) = \lambda \Delta_{\mathbf{e}}(x, x_1, \ \ldots, x_{n-1})$. Кроме того из свойств определителей следует равенство
$\Delta_{\mathbf{e}}(x_k, x_1, \ \ldots, x_{k-1}, v, x_{k+1}, \ \ldots, x_{n-1}) = -\Delta_{\mathbf{e}}(v, x_1, \ \ldots, x_{n-1})$.
Следовательно, числа $p(u)$ и $p(v)$ имеют противоположные знаки. ■

Задача. В $C[\mathbf{S}^1]$ не существует четномерных Чебышевских подпространств.